

1996 年度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(HB)で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し、切取線より切り離してください。
4. 試験時間は 90 分です。
5. 問題は、2～4 ページ目にあり 4 問で、余白は計算用紙です。

〔Ⅰ〕 四角形 ABCD において

$$AB = \sqrt{2}, \quad BC = 2, \quad CD = 1$$

$$\angle BCD = 60^\circ, \quad \angle ADC = 135^\circ$$

のとき、AD の長さ、および四角形 ABCD の面積を求めよ。

〔Ⅱ〕 大量のデータをある条件を満たすように並べる 2 つのアルゴリズムに従ってソフト A と B を作った。データの個数が n 個のとき、あるコンピュータで、ソフト A では $(2^n - 1)$ マイクロ秒、ソフト B では $(5n^2 - 2n)$ マイクロ秒かかるという。ここで、1 マイクロ秒というのは 10^{-6} 秒のことである。

ソフト A では、データの個数が少ないときには速く並べることができるが、データの個数がある値より大きくなるとソフト B よりつねに多くの時間を要することになり、ソフト A のアルゴリズムは、大量のデータ処理にはあまり適さないことになる。

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) ソフト A の方がソフト B より速くデータを並べることができる n をすべて求めよ。
- (2) (1) を満たさない n に対して、ソフト A の方がソフト B よりつねに多くの時間を要することを証明せよ。

〔Ⅲ〕 次の をうめよ。

(1) $2 + \log_2(3x - 4) \geq \log_2(10 + x - x^2)$

を満たす x の値の範囲は ① である。

(2) 直線 l の方程式を

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{4-a} = 1$$

とする。ただし、 a は $0 < a < 4$ を満たしているとする。

y 軸に関して直線 l と対称な直線を l_y とすると、 l_y の方程式は ② である。

また、 x 軸に関して直線 l と対称な直線を l_x とすると、 l_x の方程式は ③ で、原点に関して直線 l と点対称な直線を l_o とすると、 l_o の方程式は ④ である。

4本の直線 l , l_y , l_x , l_o で囲まれてできる四角形の面積を S とすると、 S は ⑤ となって、 a の関数となる。

ここで、 a が $0 < a < 4$ を満たしながら動くとき、 S は $a =$ ⑥ のとき最大値 ⑦ をとり、そのときの四角形の形は ⑧ となる。

〔IV〕 次の をうめよ。

曲線

$$y = x^3 - 2x^2 + 2x \cdots \cdots \textcircled{ア}$$

と直線

$$y = kx \cdots \cdots \textcircled{イ}$$

が、 x 座標が正または0であるような異なる3点で交わる時、 k のとりうる値の範囲は ① である。このとき、原点と異なる2つの交点の x 座標を α 、 β ($\alpha < \beta$) とするとき、

$$\alpha + \beta = \text{ ② }, \quad \alpha\beta = \text{ ③ }$$

となる。

$0 \leq x \leq \alpha$ において曲線 $\textcircled{ア}$ と直線 $\textcircled{イ}$ で囲まれる領域の面積を S_1 とし、
 $\alpha \leq x \leq \beta$ において曲線 $\textcircled{ア}$ と直線 $\textcircled{イ}$ で囲まれる領域の面積を S_2 とする。

x の関数 $F(x)$ が

$$F(x) = \int x(x - \alpha)(x - \beta)dx, \quad F(0) = 0$$

を満たすとき、 S_1 、 S_2 は $F(\alpha)$ と $F(\beta)$ を用いて

$$S_1 = \text{ ④ }, \quad S_2 = \text{ ⑤ }$$

と表される。

そこで、 $S_1 : S_2 = 1 : 2$ となる条件を α 、 β だけで表し、整理すると

$$\text{ ⑥ } = 0$$

となり、この式を k だけで表すと

$$\text{ ⑦ } = 0$$

となる。

このことから、 $S_1 : S_2 = 1 : 2$ となる k の値は ⑧ である。

(以 上)