

A 日程 文学部

[I] 配点35点 平均21.8点

(解答例)

$2^x + 2^{-x} = t$ とおくと $t^2 = 4^x + 2 + 4^{-x}$ ゆえに、方程式は $t^2 - 10t + 16 = 0$ となる。これを解いて $t = 2$ または 8 。

$t = 2$ のとき、 $2^x + 2^{-x} = 2$ より $2^x = s$ とおき $s^2 - 2s + 1 = 0$ を解くと、 $s = 1$ ゆえに $x = \log_2 1 = 0$ となる。

$t = 8$ のときも同様にして、 $s^2 - 8s + 1 = 0$ を解いて、 $s = 4 \pm \sqrt{15}$ ここで $4 - \sqrt{15} > 0$ だから $x = \log_2(4 \pm \sqrt{15})$ となる。ゆえに、解答は $x = 0, \log_2(4 \pm \sqrt{15})$ となる。

[II] 配点30点 (①②③④⑤各6点) 平均6.3点

(解答例)

高さ h 、底面の半径 r の直円錐の底面の面積は πr^2 、側面の面積は $\pi(\sqrt{r^2 + h^2})^2 \cdot (\theta / 2\pi)$ であり、一方、底面と扇形の周の長さを比較して

$$\theta / (2\pi) = 2\pi r / (2\pi(\sqrt{r^2 + h^2}))$$

が出るから、この直円錐の側面と底面の面積の和は

$$S = \pi r(r + \sqrt{r^2 + h^2}) \quad \text{①}$$

となる。つぎに、 $S = 1$ より $1 - \pi r^2 = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ となり、ゆえに

$$r^2 = 1 / (2\pi + \pi^2 h^2) \quad \text{②}$$

が出る。また、直円錐の体積は $V = \pi r^2 h / 3$ であるから

$$A = 1/V = 3((2/h) + \pi h) \quad \text{③}$$

となる。さらに、相加平均 $\geq$ 相乗平均より

$A = 3((2/h) + \pi h) \geq 6\sqrt{(2/h) \cdot \pi h} = 6\sqrt{2\pi}$ が成り立ち、かつ $2/h = \pi h$ のとき A は最小値 $6\sqrt{2\pi}$ をとる。つまり、 V を最大にする h は $h = \sqrt{(2/\pi)}$ ④である。またこのとき $V = 1/A = 1/(6\sqrt{2\pi})$ となり、それから $r = 1/(2\sqrt{\pi})$ ⑤が出る。

[III] 配点35点 平均6.2点

(解答例)

$2/m = 1/a + 1/b$ より $2ab = m(a+b)$ ゆえに $(2a-m)(2b-m) = m^2$ が成り立つ。

(1) $m = 9$ のとき、 $m = 81$ の約数は $1, 3, 9, 27, 81$ である。また $0 < a < b$ から、 $2a - m < 2b - m$ となり、かつこれら2数の積が正となるから、 $0 < 2a - m$ も言える。 a, b が共に整数だから、 $2a - m = 1, 2b - m = 81$ と、 $2a - m = 3, 2b - m = 27$ の2つの場合があり、したがって $a = 5, b = 45$ と、 $a = 6, b = 18$ となる。

(2) m が素数のときは、 m^2 の約数は $1, m, m^2$ だけで、 $0 < 2a - m < 2b - m$ より $2a - m = 1, 2b - m = m^2$ の場合だけとなり、 $a = (m+1)/2, b = (m^2+m)/2 = m(m+1)/2$ となる。