

A 日程 法学部

[I] 配点35点 平均17.8点

(解答例)

$$(1) f(x) = x(x^2 + ax + b) = x^3 + ax^2 + bx$$

が極大値と極小値をもつためには

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 0$$

が相異なる2実根を持つことが必要かつ十分である。

したがって

$$a^2 - 3b > 0$$

が必要かつ十分条件となる。

(2) $f(x)$ の3次の項が正であるから、 $f(x)$ が極大値をとるのは x が $f'(x) = 0$ の解

$$x = (-a \pm \sqrt{a^2 - 3b}) / 3$$

の小さい方においてであり、それが $0 < x < 1$ を満たすことから

$$0 < -a - \sqrt{a^2 - 3b} < 3$$

となる。この条件から

$$a < -\sqrt{a^2 - 3b} \leq 0$$

となり、 $a < 0$ と $b > 0$ が出る。また、

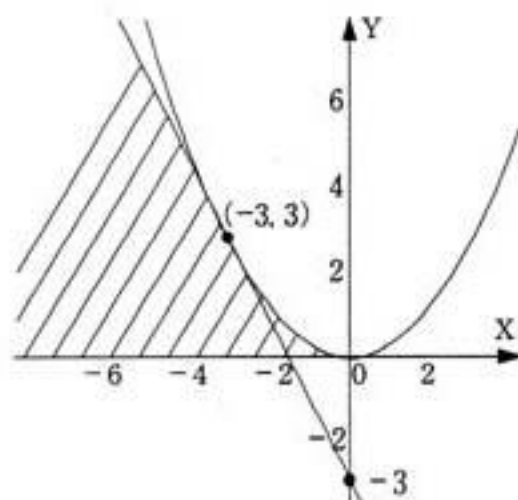
$$-3 - a < \sqrt{a^2 - 3b}$$

より、 $a < -3$ のとき

$$a^2 + 6a + 9 < a^2 - 3b$$

ゆえに、 $b < -2a - 3$ が成り立つ。

これらの条件を図示すると下図のようになる。なお、境界は含まれない。



[II] 配点30点 (①②③④⑤各6点) 平均25.5点

(解答例)

$$a_n \text{ は等差数列であるから } a_n = a_1 + d(n-1)$$

と表わされる。ゆえに

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5a_1 + 10d = 2000$$

したがって $a_1 = \boxed{400 - 2d}$ ① となる。

つぎに、

$$a_1 + a_n = 2a_1 + d(n-1) = 800 + d(n-5) = 1999$$

より $(n-5)d = \boxed{1199}$ ② となる。

また、 $1199 = 11 \times 109$ であり、 $5 \leq n \leq 100$ であるから、 $n-5 = 11$ となり、したがって

$$n = \boxed{16} \text{ ③、} d = \boxed{109} \text{ ④が出る。ゆえに } a_1 = 400 - 2d = \boxed{182} \text{ ⑤となる。}$$

[III] 配点35点 平均16.0点

(解答例)

(1) 正弦定理より

$$4 / \sin A = 2R = 6 \text{ ゆえに } \sin A = 2/3$$

(2) (1)より $\cos A = \pm \sqrt{5}/3$

また、余弦定理より

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A$$

ゆえに

$$(AB^2 + AC^2 - BC^2) / (2AB \cdot AC) = \cos A = \pm \sqrt{5}/3$$

ここで $BC = 4$ は有理数であるから、もし AB と AC が共に有理数であると仮定したならば、上式の左辺は有理数となる。一方、 $\pm \sqrt{5}$ が無理数であるから、上式の右辺は無理数となって矛盾する。

したがって、 AB 、 AC の少なくとも一方は無理数でなくてはならない。