

S 日程 文科系全学部

[I] 配点30点 平均14.9点

(解答例)

$x^2 + y^2 = 1$ より $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ とおく。 $y \geq 0$ より $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

$y \geq -\sqrt{3}x$ より $-30^\circ \leq \theta \leq 120^\circ$

ゆえに、動点 P の θ の範囲は $0^\circ \leq \theta \leq 120^\circ$ となる。このとき

$$x + y = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2} \sin(\theta + 45^\circ)$$

ここで $45^\circ \leq \theta + 45^\circ \leq 165^\circ$ であるから $\sin 165^\circ \leq \sin(\theta + 45^\circ) \leq 1$ となる。また、 $\sin 165^\circ = \sin 15^\circ = \sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)/4$ であるから、求める $x + y$ の範囲は $(\sqrt{3} - 1)/2 \leq x + y \leq \sqrt{2}$ となる。

[II] 配点35点 (①②③各5点、④⑤⑥⑦⑧各4点) 平均4.1点

(解答例)

(1) a_n が公比 r の等比数列だから

$$A = \sum a_1 r^{k-1} = a_1(1 - r^n)/(1 - r)$$

また、 n は奇数だから

$$B = \sum a_1(-r)^{k-1} = a_1(1 - (-r)^n)/(1 - (-r)) = a_1(1 + r^n)/(1 + r)$$

一方

$$C = \sum a_1^2(r^2)^{k-1} = a_1^2(1 - (r^2)^n)/(1 - r^2) = a_1^2(1 - r^{2n})/(1 - r^2)$$

ゆえに $C = \boxed{AB}$ ①

(2) $C = 133 = 7 \cdot 19$ かつ $A > B > 1$ より

$$A = \boxed{19} \text{ ②, } B = \boxed{7} \text{ ③ となる。}$$

また、 $A + B = 2 \cdot (\text{奇数番目の項の和})$ 、 $A - B = 2 \cdot (\text{偶数番目の項の和})$ であるから、

$$\text{奇数番目の項の和} = \boxed{13} \text{ ④, 偶数番目の項の和} = \boxed{6} \text{ ⑤}$$

となる。さらに、 a_n が自然数で、 $r > 1$ であるから $a_1 \geq 1$, $a_2 \geq 2$, ... となる。したがって $n = 5$ とすると偶数番目の項の和が6であるから $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ でなければならないが、そのときは公比は $\sqrt{2}$ となり、したがって $a_1 = \sqrt{2}$ となって題意に反する。

ゆえに、 $n = \boxed{3}$ ⑥、したがって $a_2 = 6$, $a_1 + a_3 = 13$ となり、これから $a_1 = \boxed{4}$ ⑦、

$r = \boxed{3/2}$ ⑧が出る。

[III] 配点35点 平均13.7点

(解答例)

(1) $x = p$ を軸とする放物線は $y = a(x - p)^2 + b$ と書けるが、これが原点と (p, p) を通ることから $0 = ap^2 + b$, $p = b$ となり、したがって C_2 の方程式は $y = -(1/p)x^2 + 2x$ となる。

(2) $y = x^2$ と $y = -(1/p)x^2 + 2x$ から $\alpha = 2p/(p+1)$ が出る。このとき、 $p > 1$ より $2p > p+1$ ゆえに $\alpha > 1$ が出る。また $p - (2p/(p+1)) = (p^2 - p)/(p+1) > 0$ より $p > \alpha$ も言える。ゆえに $1 < \alpha < p$ 。

$$(3) S_1 = \int_0^\alpha (-(1 + (1/p))x^2 + 2x) dx = \alpha^2/3$$

$$S_2 = \int_\alpha^p ((1 + (1/p))x^2 - 2x) dx$$

$$= p^2((p+1)/3 - 1) + \alpha^2/3$$

したがって、 $S_1 = S_2$ のとき $p = 2$ となる。