

S 日程 工学部

[I] (50点) (1)25点 (2)25点

$$(1) (s-a)(s-x)(a+x-s) = -(s-a)\left(x - \frac{2s-a}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}(s-a)a^2 \dots\dots\dots \textcircled{7}$$

$0 < a < s$ だから

$$-(s-a) < 0 \text{ かつ } s-a < \frac{2s-a}{2} < s \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

である。よって、 x の 2 次関数 y は

$$y \text{ の最大値 } \frac{1}{4}(s-a)a^2 \quad \left(x = \frac{2s-a}{2} \text{ のとき}\right) \quad (\text{答})$$

$$(2) F(a) = \frac{1}{4}(s-a)a^2, \quad F'(a) = \frac{1}{4}(2sa - 3a^2) \dots\dots\dots \textcircled{7}$$

$F'(a) = 0$ とおいて

$$a = 0, \quad \frac{2}{3}s$$

右の変化表より、

a	0	...	$\frac{2}{3}s$	...	s
F'		+	0	-	
F		↗	極大	↘	

$0 < a < s$ の範囲では、 $a = \frac{2}{3}s$ のとき $F(a)$

は最大となり、(答) 最大値 $F\left(\frac{2}{3}s\right) = \frac{1}{27}s^3$

[II] (50点) (1)20点 (2)15点 (3)15点

$$(1) f'(x) = \frac{1}{x^2}(1 - \log x) \dots\dots\dots \textcircled{7}$$

$f'(x) = 0$ とおいて

$$x = e \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

右の変化表より

x	0	...	e	...
f'		+	0	-
f		↗	極大	↘

$f(x)$ の極大値 $f(e) = \frac{1}{e}$ (極小値なし) (答)

$$(2) \text{面積} = \int_2^4 \frac{1}{x} \log x \, dx \quad \log x = t \text{ で置換し}$$

$$= \int_{\log 2}^{\log 4} t \, dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_{\log 2}^{\log 4}$$

$$= \frac{1}{2} \{(\log 4)^2 - (\log 2)^2\} \quad \left(= \frac{3}{2}(\log 2)^2\right) \dots\dots\dots \textcircled{7}$$

(3) (1)により $e < x$ で $f(x)$ は減少 (関数) で、 $e < \pi < 4$ だから $f(e) > f(\pi) > f(4)$

$$\text{また } f(4) = \frac{1}{4} \log 4 = \frac{1}{2} \log 2 = f(2)$$

したがって、 $f(2) < f(\pi) < f(e)$ (答)

[III] (50点) (1)20点 (2)10点 (3)20点

$$(1) |\alpha| = OA = OB = |\beta| \text{ だから } \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| = \boxed{\textcircled{1} 1} \quad (4 \text{ 点}), \quad \angle AOB = 60^\circ \text{ で}$$

$$\theta = \arg \frac{\beta}{\alpha} = \angle AOB, \quad 360^\circ - \angle AOB = \boxed{\textcircled{2}, \textcircled{3} 60^\circ, 300^\circ} \quad (6 \text{ 点}). \text{ よって}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ, \quad \cos 300^\circ + i \sin 300^\circ \text{ を用いて計算し、} \boxed{\textcircled{4} -1} \quad (5 \text{ 点}). \text{ つぎに}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) + (\cos(-60^\circ) + i \sin(-60^\circ))$$

$$\text{等と } \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = 1 \text{ から } \boxed{\textcircled{5} z^2 - z + 1} = 0 \quad (5 \text{ 点}).$$

$$(2) \arg \alpha = \theta \text{ とおき } \arg \beta = \theta \pm 60^\circ$$

$$\arg \alpha^n = n\theta, \quad \arg \beta^n = n\theta \pm (60^\circ \times n)$$

$$\alpha^n = \beta^n \text{ となるのは } \arg \alpha^n = \arg \beta^n$$

となるとき、すなわち $\pm 60^\circ \times n$ が 360° の整数倍のときであり、 $\boxed{\textcircled{6} 6} \quad (10 \text{ 点})$

$$(3) \alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad |\alpha| = r \text{ とおく。}$$

$$\alpha + \frac{2}{\alpha} = \text{実数から} \left(r - \frac{2}{r}\right) \sin \theta = 0, \quad \sin \theta \neq 0 \text{ だから、} \boxed{r = \textcircled{7} \sqrt{2}} \quad (10 \text{ 点})$$

$$n = 1, 2, \dots, 5 \text{ について調べて } \boxed{n = \textcircled{8} 4} \quad (5 \text{ 点}) \quad \boxed{\textcircled{9} 48} \quad (5 \text{ 点})$$

[IV] (50点) (1)~(5)各問10点

$$(1) \boxed{\textcircled{1} (1, 2, -2)} \quad (10 \text{ 点})$$

$$(2) \boxed{\frac{3}{4}\pi, \frac{11}{12}\pi} \quad (5 \text{ 点} \times 2 \text{ で } 10 \text{ 点})$$

$$(3) \frac{{}_3C_3 + {}_5C_3}{{}_{10}C_3} = \boxed{\textcircled{3} \frac{11}{120}} \quad (5 \text{ 点})$$

$$3 \text{ 個とも色ちがい、または、上の事象との余事象として } \boxed{\textcircled{4} \frac{79}{120}} \quad (5 \text{ 点})$$

$$(4) f_1 \text{ から始めて } f_2, f_3 \text{ と計算して } f_3(x) = \boxed{\textcircled{5} 1 + 2x + 3x^2} \quad (5 \text{ 点})$$

$$f_n(x) \text{ は } f_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} \text{ と推測でき、} f_n(1) = \boxed{\textcircled{6} \frac{1}{2}n(n+1)} \quad (5 \text{ 点})$$

$$(5) a^2 + b = 3, \quad a = c \text{ で自然数であるという条件より、}$$

$$a = \boxed{\textcircled{7} 1} \quad b = \boxed{\textcircled{8} 2} \quad c = \boxed{\textcircled{9} 1} \quad (\text{全部正答で } 10 \text{ 点})$$