〔Ⅰ〕 n は自然数で，k は $k>n$ を満たす実数とする。曲線 $y=\dfrac{1}{x}\,(x>0)$ と2直線 $y=nx$，$y=kx$ によって囲まれる部分の面積を S_k とする。次の問いに答えよ。

(1) $y=\dfrac{1}{x}$ と $y=kx$ との交点の x 座標を α，$y=\dfrac{1}{x}$ と $y=nx$ との交点の x 座標を β とするとき，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ を n と k を用いて表せ。

(2) S_k を n と k を用いて表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}S_k$ を求めよ。

〔Ⅱ〕 $f(x)=x^3e^{-x}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における接線と y 軸との交点を Q，点 $(0,\ f(t))$ を R とし，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を $S(t)$ とする。ただし，Q と R が一致するときは $S(t)=0$ とする。$S(t)$ を t を用いて表せ。

(3) $t>0$ における $S(t)$ の最大値と，そのときの t の値を求めよ。ただし，必要なら，$e<3$ であることを用いてよい。

〔Ⅲ〕 三角形ABCの頂点を移動する動点Pがある。移動の向きについては，A→B，B→C，C→Aを正の向き，A→C，C→B，B→Aを負の向きとよぶことにする。

硬貨を投げて，表が出たらPはそのときの位置にとどまり，裏が出たときはもう一度硬貨を投げ，表なら正の向きに，裏なら負の向きに隣りの頂点に移動する。この操作を1回のステップとする。

動点Pははじめに頂点Aにあるものとして，次の $\boxed{}$ をうめよ。ただし，①から⑤には既約分数を入れよ。

(1) 1回目のステップののちにPがAにある確率は $\boxed{①}$ ，Bにある確率は $\boxed{②}$ である。

(2) 2回目のステップののちにPがAにある確率は $\boxed{③}$ ，Bにある確率は $\boxed{④}$ である。

(3) 3回目のステップののちにPがAにある確率は $\boxed{⑤}$ である。

(4) n 回目のステップののちにPがAにある確率を a_n とすると，a_{n+1} を a_n で表す漸化式は

$$a_{n+1} = \boxed{⑥} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

である。a_n を n の式で表すと

$$a_n = \boxed{⑦} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

となる。

〔Ⅳ〕 次の $\boxed{}$ をうめよ。

(1) $\log_x 3 = 2$ を満たす x は $\boxed{\ ①\ }$ である。

(2) $x < 1$ のとき，x の関数 $y = x + \dfrac{1}{x-1}$ は $x = \boxed{\ ②\ }$ において最大値 $y = \boxed{\ ③\ }$ をとる。

(3) ベクトル $\vec{a} = \left(\cos\dfrac{7\pi}{24},\ \sin\dfrac{7\pi}{24}\right)$ と $\vec{b} = \left(\cos\dfrac{\pi}{8},\ \sin\dfrac{\pi}{8}\right)$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値は $\boxed{\ ④\ }$ である。

(4) $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，不等式 $|2\cos x + \sqrt{3}\sin x| \leqq \sqrt{3}\sin x$ を満たす x の範囲は $\boxed{\ ⑤\ }$ である。

(5) $z = \cos\dfrac{\pi}{16} + i\sin\dfrac{\pi}{16}$ であるとき，$z^4 + \dfrac{1}{z^4}$ の値は $\boxed{\ ⑥\ }$ である。ただし，$i = \sqrt{-1}$ である。

(6) 平面上に縦に 8 本の平行線が，横に n 本の平行線が並んでいて，1540 個の長方形ができるのは，$n = \boxed{\ ⑦\ }$ のときである。

(以　上)