I

（1）

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x-1)(x+3)(x-3)(x+5)\\
&= (x^2+2x-3)(x^2+2x-15)\\
&= \{(x^2+2x-9)+6\}\{(x^2+2x-9)-6\}\\
&= (t+6)(t-6) = t^2-36 \qquad \text{…(答)}
\end{aligned}
$$

（2）

(1)で$f(x)$は$t$の２次式として表せたのでまず$t$の取り得る値の範囲を考えると

$t=(x+1)^2-10$ より　$t \geqq -10$

この範囲で $f(t)=t^2-36$は、$t=0$のとき最小値－36 をとる。

すなわち、$t=0$となるのは

$x^2+2x-9=0$ より　$x=-1\pm\sqrt{10}$

のときだから、$f(x)$は$x=-1\pm\sqrt{10}$のとき最小値－36 をとる。……(答)

Ⅱ

① $3r^2$ ② $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ③ $6\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)r$

④ $\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{2}$

Ⅲ

（1）

$$y' = 2x$$

点P，Qにおける接線の方程式は、それぞれ

$$\begin{cases} y - s^2 = 2s(x - s) \\ y - t^2 = 2t(x - t) \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} y = 2sx - s^2 \cdots\cdots① \\ y = 2tx - t^2 \cdots\cdots② \end{cases}$$

①、②を連立させて$x, y$を求めると

$$x = \frac{s+t}{2}, \qquad y = st$$

$$\therefore \quad R\left(\frac{s+t}{2},\quad st\right) \cdots\cdots (答)$$

（2）

PQの傾きは、$\dfrac{s^2 - t^2}{s - t} = s + t$

∠PQR=90° より(PQの傾き)×(QRの傾き)= −1

$$\therefore (s + t) \times 2t = -1$$

これを$s$について解いて、$s = -t - \dfrac{1}{2t} \cdots\cdots$ (答)

（3）

$$\overrightarrow{RP} = \left(s - \frac{s+t}{2},\ s^2 - st\right) = \left(\frac{s-t}{2},\ s(s-t)\right)$$

$$\overrightarrow{PQ} = \left(t - \frac{s+t}{2},\ t^2 - st\right) = \left(\frac{t-s}{2},\ t(t-s)\right)$$

ここで、一般に △OABにおいて$\overrightarrow{OA} = (a, b)$ $\overrightarrow{OB} = (c, d)$のとき △OABの面積は

$\dfrac{1}{2}|ad - bc|$であるから

$$S = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{s-t}{2}\right)\cdot t(t-s) - \left(\frac{t-s}{2}\right)\cdot s(s-t)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|-\frac{t(t-s)^2}{2} + \frac{s(t-s)^2}{2}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{(t-s)^2(s-t)}{2}\right|$$

$$= \frac{1}{4}(t-s)^3$$

(2)の$s = -t - \dfrac{1}{2t}$を代入して、

$$S = \frac{1}{4}\left(2t + \frac{1}{2t}\right)^3$$

ここで、$2t > 0$, $\dfrac{1}{2t} > 0$ ゆえ相加·相乗平均の関係より

$$2t + \frac{1}{2t} \geqq 2\sqrt{2t \cdot \frac{1}{2t}} \quad だから$$

$$S = \frac{1}{4}\left(2t + \frac{1}{2t}\right)^3 \geqq \frac{1}{4}\left(2\sqrt{2t \cdot \frac{1}{2t}}\right)^3 = 2$$

等号成立は$2t = \dfrac{1}{2t}$のとき、すなわち$t = \dfrac{1}{2}$のときで、$S$の最小値は2となる。……(答)