I

（1）

$x^2-xy-2y^2=0$ より

$(x+y)(x-2y)=0$

$xy>0$ より x と y は同符号だから $x+y\neq 0$

$\therefore\ x-2y=0 \quad x=2y$ ……①

①式の両辺を 2 で割って

$\frac{x}{2}=\frac{y}{1}$, $\therefore\ x:y=2:1$

（2）

$y^2-yz-6z^2=0$ より $(y+2z)(y-3z)=0$

$yz>0$ より y と z は同符号だから $y+2z\neq 0$

$\therefore\ y-3z=0 \quad y=3z$ …… ①

①より $x=2(3z)=6z$

よって

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}=\frac{(6z)^2+(3z)^2+z^2}{(6z)\cdot(3z)+(3z)\cdot z+z\cdot(6z)}$$

$$=\frac{46z^2}{27z^2}=\frac{46}{27}$$ ……（答）

Ⅱ

$$y=\left|x^2-1\right|=\begin{cases}x^2-1 & (x\leqq -1,\ 1\leqq x)\\ -x^2+1 & (-1\leqq x\leqq 1)\end{cases}$$

まず、直線と曲線の交点の x 座標を求めるために

$x^2-1=x+2$ とおくと

$x^2-x-3=0$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$$

$\alpha=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$, $\beta=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ とおくと

求める面積は

$$\int_\alpha^\beta\left\{(x+2)-(x^2-1)\right\}dx-2\int_{-1}^{1}\left(-x^2+1\right)dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta\left(x^2-x-3\right)dx-4\int_0^1\left(-x^2+1\right)dx$$

(∵ $y=-x^2+1$ は偶関数だから $\int_{-1}^{1}\left(-x^2+1\right)dx=2\int_0^1\left(-x^2+1\right)dx$)

$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx-4\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1$$

(∵ α, β は $x^2-x-3=0$ の解だから

$x^2-x-3=(x-\alpha)(x-\beta)$ のように因数分解できる。)

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3-\frac{8}{3}=\frac{1}{6}\left(\sqrt{13}\right)^3-\frac{8}{3}$$

(公式 $\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$)

$$=\frac{13\sqrt{13}}{6}-\frac{8}{3}\cdots\cdots(\text{答})$$

Ⅲ

（1） ①－(カ)　②－(カ)　③－(ウ)

（2） ④－(ア)　⑤－(キ)

（3） ⑥－(ソ)　⑦－(コ)