I

（1）

点Aの座標が、A(t , 0) であるとき
四角形ABCDが長方形となるのは
　B $(4-t,0)$ 、C $(4-t,t(4-t))$ 、D $(t,t(4-t))$
のときである。
したがって、長方形ABCDの周の長さを l とすると

$$l = 2(AB + AD) = 2((4-2t) + t(4-t))$$
$$= -2t^2 + 4t + 8$$
$$= -2(t-1)^2 + 10$$

0 < t < 2 より、
　l は t = 1 のとき、最大値 10　…（答）

（2）

長方形ABCDの面積を S とすると

$$S = AB \times AD = (4-2t) \cdot t(4-t)$$
$$= 2t^3 - 12t^2 + 16t$$
$$S' = 6t^2 - 24t + 16 = 2(3t^2 - 12t + 8)$$
$$S' = 0 \quad \text{のとき} \quad t = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{3}$$

0 < t < 2 における S の増減表は下表のようになるので

t	(0)	…	$\frac{6-2\sqrt{3}}{3}$	…	(2)
S'		+	0	−	
S		↗	最大値	↘	

$t = \frac{6-2\sqrt{3}}{3}$ のとき、$3t^2 - 12t + 8 = 0$　であり
$2t^3 - 12t^2 + 16t$　を $3t^2 - 12t + 8$ で割ったときの
商は $\frac{2}{3}t - \frac{4}{3}$，余りは $-\frac{16}{3}t + \frac{32}{3}$ であるから

$$S = 2t^3 - 12t^2 + 16t = (3t^2 - 12t + 8)\left(\frac{2}{3}t - \frac{4}{3}\right) - \frac{16}{3}(t-2)$$

$t = \frac{6-2\sqrt{3}}{3}$ を代入すると $3t^2 - 12t + 8 = 0$ だから上式の第 1 項は 消える。
したがって、最大値は

$$S = -\frac{16}{3}\left(\frac{6-2\sqrt{3}}{3} - 2\right) = \frac{32\sqrt{3}}{9}$$

よって、$t = \frac{6-2\sqrt{3}}{3}$ のとき

最大値　$\frac{32\sqrt{3}}{9}$　…（答）

II

(1)

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)\{(2n+1)+3\}}{6}$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad \ldots(答)$$

(2)

$\frac{1}{n}a_{n+1} - \frac{1}{n+1}a_n = 1$ の両辺に $n(n+1)$ をかけて

$(n+1)a_{n+1} - na_n = n(n+1) \qquad (n = 1,2,3 \ldots\ldots)$

両辺で和をとって

$$\sum_{k=1}^{n}((k+1)a_{k+1} - ka_k) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$$

ここで

$$左辺 \begin{aligned} &= (2a_2 - a_1) + (3a_3 - 2a_2) + (4a_4 - 3a_3) + \ldots + ((n+1)a_{n+1} - na_n) \\ &= (n+1)a_{n+1} - a_1 = (n+1)a_{n+1} \qquad (\because \ a_1 = 0) \end{aligned}$$

したがって、$(n+1)a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$

(1)の結果より

$$(n+1)a_{n+1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \qquad \therefore a_{n+1} = \frac{n(n+2)}{3} \qquad (n \geqq 1)$$

よって、n≧2のとき、$a_n = \frac{(n-1)(n+1)}{3}$ であるが、

これはn=1 のときも満たしている。

$$\therefore a_n = \frac{(n-1)(n+1)}{3} \quad \ldots(答)$$

(3)

(2)の結果より

$$\frac{1}{a_k} = \frac{3}{(k-1)(k+1)} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(k+1)-(k-1)}{(k-1)(k+1)}$$
$$= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) \text{であるから}$$

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_k} = \frac{3}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)$$
$$= \frac{3}{2}\left\{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$= \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= \frac{3}{2} \times \frac{3n(n+1) - 2(n+1) - 2n}{2n(n+1)}$$
$$= \frac{3(3n^2 - n - 2)}{4n(n+1)} = \frac{3(n-1)(3n+2)}{4n(n+1)} \qquad \ldots(答)$$

Ⅲ

① $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ ② $\dfrac{\sqrt{2}}{2}k$ ③ $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ ④ $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

⑤ $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ⑥ $\dfrac{1}{2}$ ⑦ 75