I

$$x^2 - y^2 + x + y = 0 \quad ①$$

$$x^2 - 3x + 2y^2 + 3y = 9 \quad ②$$

①より、 $(x+y)(x-y)+(x+y)=0$

$$(x+y)(x-y+1)=0$$

よって、$x+y=0$ または $x-y+1=0$

（i）$x+y=0$ つまり $y=-x$ のとき

この y を②に代入すると

$$x^2 - 3x + 2x^2 - 3x = 9$$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$3(x-3)(x+1)=0$$

よって　$x = 3,\ -1$

$x=3$のとき　$y=-x$より　$y=-3$

$x=-1$のとき　$y=-x$より　$y=1$

（ii）$x-y+1=0$ つまり $y=x+1$ のとき

この y を②に代入すると

$$x^2 - 3x + 2(x+1)^2 + 3(x+1) = 9$$

$3x^2 + 4x - 4 = 0$　$(3x-2)(x+2)=0$

よって　$x=\frac{2}{3},\ -2$

$x=\frac{2}{3}$のとき　$y=x+1$より　$y=\frac{5}{3}$

$x=-2$のとき　$y=x+1$より　$y=-1$

以上より

$(x,y)=(-2,-1),(-1,1),(\frac{2}{3},\frac{5}{3}),(3,-3)$　（答）

Ⅱ

（1）① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}+\sqrt{3}$

（2）③ 5 ④ 6 ⑤ $2+\sqrt{3}$

Ⅲ

（1）

$$(\text{右辺})-(\text{左辺})=(1-A)(1-B)-\{1-(A+B)\}$$
$$=(1-A-B+AB)-(1-A-B)$$
$$=AB>0 \quad (\because A>0,\ B>0)$$

よって、$1-(A+B)<(1-A)(1-B)$　(証明終)

（2）

$$1-(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n)<(1-p_1)(1-p_2)\cdots\cdots(1-p_n)\cdots\cdots①$$

について

（i）$n=2$ のとき

$0<p_i<1$　(i=1,2…n) より

$p_1>0$　かつ $p_2>0$ であるから

（1）の結果により

$$1-(p_1+p_2)<(1-p_1)(1-p_2)$$

したがって　$n=2$ のとき①は成り立つ。

（ii）$n=k$　($k\geqq 2$)のとき

$0<p_i<1$　(i=1,2,3…k) に対して

①が成り立つと仮定する。すなわち

$$1-(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_k)<(1-p_1)(1-p_2)\cdots\cdots(1-p_k)\cdots\cdots②$$

このとき

$$(1-p_1)(1-p_2)\cdots\cdots(1-p_k)(1-p_{k+1})-(1-(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_k+p_{k+1}))$$

$$>(1-(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_k))(1-p_{k+1})-(1-(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_k))+p_{k+1}$$

（∵　②と$0<p_{k+1}<1$より）

$$=-p_{k+1}(1-(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_k))+p_{k+1}$$
$$=p_{k+1}(1-(1-(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_k)))$$
$$=p_{k+1}(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_k)>0$$

（∵　$p_i>0$　(i=1,2,3…$k+1$)）

よって

$$1-(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_k+p_{k+1})<(1-p_1)(1-p_2)\cdots\cdots(1-p_k)(1-p_{k+1})$$

ゆえに　$n=k+1$ のときも①は成り立つ。

（i）、（ii）より2以上のすべての自然数に対して①は成り立つ。

(証明終)