［Ⅰ］

真数条件は，

$x-2>0$ かつ $2x+3>0$ かつ $x>0$

$\therefore \quad x>2$

ここで，

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x+3)=\frac{\log_2(2x+3)}{\log_2 2^{-1}}$$

$$=-\log_2(2x+3)$$

となるから，与えられた不等式は，

$\log_2(x-2)(2x+3)<\log_2 x^2$

$(x-2)(2x+3)<x^2$

$x^2-x-6<0$

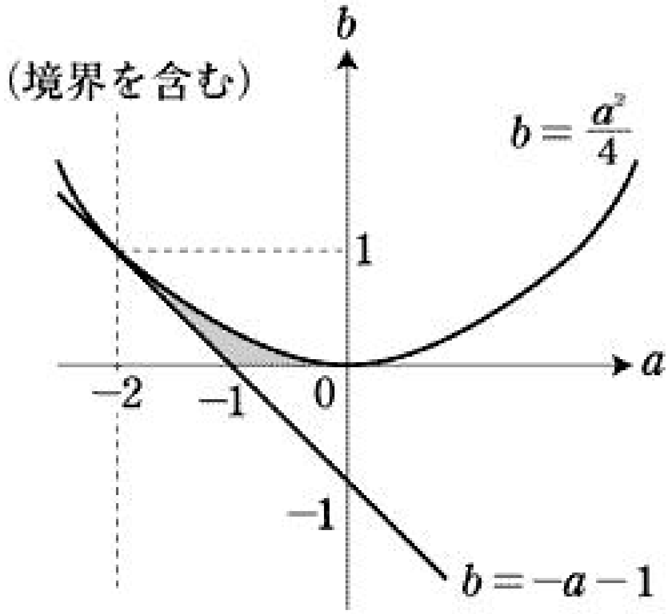
$\therefore \quad -2<x<3$

真数条件より，

$2<x<3 \quad \cdots$（答）

［Ⅱ］

(1) $\begin{cases} a^2-4b \geqq 0 \\ 0 \leqq -\dfrac{a}{2} \leqq 1 \\ b \geqq 0,\quad 1+a+b \geqq 0 \end{cases}$



よって，

$$\begin{cases} -2 \leqq a \leqq 0 \\ b \leqq \dfrac{a^2}{4} \\ b \geqq 0,\quad b \geqq -a-1 \end{cases}$$

(2) 放物線 $b=\dfrac{a^2}{4}$ と，点Q $\left(0,\ \dfrac{5}{2}\right)$ を中心とする

円が $-2<a<0$ で接するときを考える。

放物線の接線の傾きは $b'=\dfrac{a}{2}$ だから，

垂直条件より，$\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{5}{2}}{a}=-1$

$-2<a<0$ より，$a=-\sqrt{2}$

よって，点Pが $\left(-\sqrt{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ のときPQの長さは最小となり，

その値は，$\sqrt{2+\left(\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{6}$ …（答）

［Ⅲ］

① $\dfrac{2}{9}$

② $\dfrac{7}{9}$

③ $\dfrac{5}{9}$

④ $\begin{cases} n=1 \text{ のとき } 1 \\ n \geqq 2 \text{ のとき } \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2} \end{cases}$

⑤ $\dfrac{118}{9}$