〔I〕

(1)

$$x^3+mx^2-mx-1$$
$$=x^3-x^2+(m+1)x^2-(m+1)x+x-1$$
$$=(x-1)\{x^2+(m+1)x+1\}$$

よって商は $x^2+(m+1)x+1$ …①

(2)

実数解が $x=1$ だけである場合を考えると

(i) $x^2+(m+1)x+1=0$ が $x=1$ を重解でもつ場合

このとき $m=-3$ である。

(ii) $x^2+(m+1)x+1=0$ が実数解をもたない場合

判別式 D は，$D=(m+1)^2-4$

$$=m^2+2m-3$$

$D<0$ であるから，$m^2+2m-3<0$

$$(m+3)(m-1)<0$$
$$-3<m<1$$

m は整数であったから，$m=-2,\ -1,\ 0$

(i)(ii)より，$m=-3,\ -2,\ -1,\ 0$ …（答）

〔Ⅱ〕

① $\frac{1}{32}$　② $\frac{3}{16}$　③ $\frac{63}{64}$

④ 100　⑤ 125　⑥ $100-a$

⑦ $125-\frac{5}{4}a$　⑧ 100　⑨ イ

⑩ 5

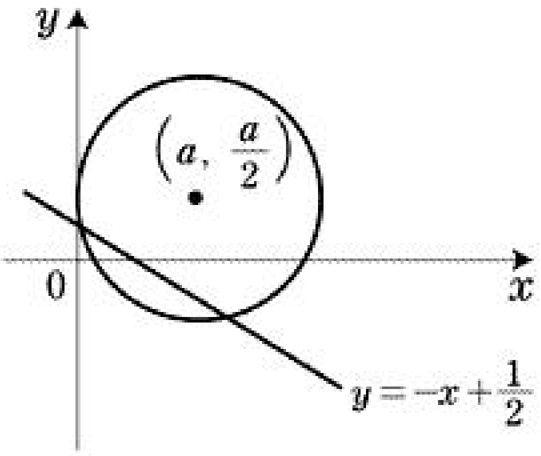
〔Ⅲ〕

Cの方程式は

$$(x-a)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=a^2$$

この方程式に $y=-x+\dfrac{1}{2}$ を

代入すると



$$x^2-2ax+a^2+\left(x-\frac{1}{2}+\frac{a}{2}\right)^2=a^2$$

$$x^2-2ax+a^2+x^2+\frac{1}{4}+\frac{a^2}{4}-x+ax-\frac{a}{2}=a^2$$

$$2x^2-ax-x+\frac{a^2}{4}-\frac{a}{2}+\frac{1}{4}=0$$

$$2x^2-(a+1)x+\frac{1}{4}(a-1)^2=0 \quad \cdots①$$

円 C が $y=-x+\dfrac{1}{2}$ と異なる２点で交わるとき，この方程式は２つの異なる実数解をもつから判別式より，

$(a+1)^2-2(a-1)^2>0$

$a^2+2a+1-2a^2+4a-2>0$

$-a^2+6a-1>0$

$a^2-6a+1<0$

$a^2-6a+1=0$ を解くと $a=3\pm2\sqrt{2}$

よって，$3-2\sqrt{2}<a<3+2\sqrt{2}$ …（答）

また①の２解を α，β とすれば，２交点の距離が最大となるときこの２点は $y=-x+\dfrac{1}{2}$ 上にあることから，$|\alpha-\beta|$ も最大となる。

解と係数の関係から，

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^2&=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\&=\frac{(a+1)^2}{4}-\frac{(a-1)^2}{2}\\&=\frac{1}{4}(-a^2+6a-1)\\&=\frac{1}{4}\left\{-(a-3)^2+8\right\}\end{aligned}$$

よって，$a=3$ のとき $(\alpha-\beta)^2$ は最大値２をとる。

このとき $|\alpha-\beta|$ も最大値 $\sqrt{2}$

$y=-x+\dfrac{1}{2}$ の傾きは -1 であるから２交点の距離は

$|\alpha-\beta|\times\sqrt{1+(-1)^2}=2$ …（答）