

[1]

(1) $a_{n+2} \cdot a_n = \frac{n+1}{n} (a_{n+1})^2$ の両辺を $a_{n+1} \cdot a_n$ で割ると

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \therefore b_{n+1} = \frac{n+1}{n} \cdot b_n$$

ゆえに

$$b_n = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{n-2}{n-3} \cdots \frac{2}{1} b_1$$

$$= n b_1$$

$$b_1 = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{6} \text{ (よ')} \quad \underline{b_n = \frac{1}{6} n} \quad \dots (\text{よ'})$$

(2) (1) よ' $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{6} n$ なので

$$\begin{cases} 1 \leq n \leq 5 \text{ の時 } a_{n+1} < a_n \\ n = 6 \text{ の時 } a_{n+1} = a_n \text{ (よ') } a_6 = a_7 \\ n > 6 \text{ の時 } a_{n+1} > a_n \end{cases}$$

よ' $a_n > a_{n+1}$ を満たす最大の n は $n = 5$... (よ')

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_5 > a_6 = a_7 < a_8 < \cdots$$

よ' 最小の n は $n = 6, 7$... (よ')

$$b_5 \cdot b_4 \cdot b_3 \cdot b_2 \cdot b_1 = \frac{a_6}{a_5} \cdot \frac{a_5}{a_4} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} = \frac{5!}{6^5}$$

$$\text{よ') } a_6 = \frac{5!}{6^5} \cdot 6 = \frac{5}{54}$$

$$\text{よ' } \underline{a_6 = a_7 = \frac{5}{54}} \quad \dots (\text{よ'})$$

$$[II] (2a+1)x^3+2ax^2+(a-a^2)x=0 \text{ より}$$

$$x\{(2a+1)x^2+2ax+(a-a^2)\}=0 \dots (*)$$

i) $a = -\frac{1}{2}$ の時

$(*)$ は 2次方程式 $-x^2 - \frac{3}{4}x = 0$ となり

$x=0, -\frac{3}{4}$ と異なる2解を持つので (適)

ii) $a \neq -\frac{1}{2}$ の時

$(*)$ から

A) $(2a+1)x^2+2ax+(a-a^2)=0$ の異なる2解のうち、一方が $x=0$ で、もう一方が $x \neq 0$ の時

1) $(2a+1)x^2+2ax+(a-a^2)=0$ が $x \neq 0$ で重解を持つ時

の2つの場合がある。

A) の時

$x=0$ を代入し、 $a-a^2=0 \therefore a=0, 1$

・ $a=0$ の時 $x^2=0$ となり、不適

・ $a=1$ の時 $3x^2+2x=0$ より $x=0, -\frac{2}{3}$ となり (適)

1) の時

判別式 $\Delta \geq 0$ とすると

$$\Delta/4 = a^2 - (2a+1)(a-a^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^3 - a = 0$$

$$\Leftrightarrow a(\sqrt{2}a+1)(\sqrt{2}a-1) = 0$$

$$\therefore a = 0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

・ $a=0$ の時 $x^2=0$ となり、不適

・ $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ の時

$$(\sqrt{2}+1)x^2 + \sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{-2+\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-2+\sqrt{2}}{2}$$

よって $(*)$ は $x=0, \frac{-2+\sqrt{2}}{2}$ の異なる2解を持ち (適)

・ $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ の時

$$(-\sqrt{2}+1)x^2 - \sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$$

$$\therefore x = -\frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

よって $(*)$ は $x=0, -\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ の異なる2解を持ち (適)

以上より

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \text{ の時} & x = 0, -\frac{3}{4} \\ a = 1 \text{ の時} & x = 0, -\frac{2}{3} \\ a = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ の時} & x = 0, \frac{-2+\sqrt{2}}{2} \\ a = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ の時} & x = 0, -\frac{2+\sqrt{2}}{2} \end{cases} \dots (*)$$

[III]

$$\textcircled{1} \quad \underline{\frac{5}{12}} \quad \dots (\frac{5}{12})$$

$$\textcircled{2} \quad \underline{\frac{1}{3}} \quad \dots (\frac{1}{3})$$

$$\textcircled{3} \quad \underline{\frac{2}{3}} \quad \dots (\frac{2}{3})$$

$$\textcircled{4} \quad \underline{\frac{19}{36}} \quad \dots (\frac{19}{36})$$

$$\textcircled{5} \quad \underline{\frac{19}{36}} \quad \dots (\frac{19}{36})$$