

2005 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(HB)〈シャープペンシルは、HB 0.5 mm以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し、切取線より切り離してください。
4. 試験時間は 90 分です。
5. 問題は 1 ～ 3 ページ目にあり 4 問で、余白は計算用紙です。

〔Ⅰ〕 三角形 ABC において、 $AB = 4$ 、 $AC = 5$ 、 $\angle BAC = 120^\circ$ とする。

$\angle BAC$ の 2 等分線と辺 BC との交点を D とする。

(1) $\frac{\triangle ADC}{\triangle ABD}$ を求めよ。

(2) $\frac{CD}{BD}$ を求めよ。

(3) AD を求めよ。

〔Ⅱ〕 次の問いに答えよ。

(1) 放物線 $y = x^2$ 上の点 $P(p, p^2)$ における接線と点 $Q(q, q^2)$ における接線の交点 R の座標を求めよ。ただし、 $p \neq q$ とする。

(2) 次の条件 (ア) を満たす点の軌跡 C を求めよ。

(ア) その点から放物線 $y = x^2$ に 2 本の接線が引けて、かつそれらが互いに垂直に交わる。

〔Ⅲ〕 α は複素数, R は実数で $0 < |\alpha| < R$ とする。複素数平面上において, α (の表す点) を中心とした半径 R の円を C とする。原点 O と α を通る直線と C との交点を β, γ ($|\beta| < |\gamma|$) とする。

次の を α と R を用いた式でうめよ。

(1) $|\beta| =$ ① $, |\gamma| =$ ② である。

(2) 複素数 z が C 上にあるための必要十分条件は z が次の等式 (ア) を満たすことである。

$$|z - \text{ ③}| = R \quad \cdots \cdots \text{(ア)}$$

(3) z が C 上にあるとき, 原点 O と z を通る直線が C と交わる点を z' ($z' \neq z$) とする。 $z \neq \beta, \gamma$ ならば, 円周角の定理より $\triangle O\beta z$ と $\triangle Oz'\gamma$ は相似である。

これより,

$$|z'| = \text{ ④} \frac{1}{|z|}$$

が成り立つ。したがって, z と z' の偏角の関係を考えれば,

$$z' = \text{ ⑤} \frac{1}{\bar{z}}$$

が成り立つ。

z が C 上を動けば, z' も C 上を動くから, z に対する条件として, (ア) は次の (イ) と同値である。

$$\left| \frac{1}{\bar{z}} - \text{ ⑥} \right| = \text{ ⑦} \quad \cdots \cdots \text{(イ)}$$

したがって, z が C 上を動くとき, $\frac{1}{\bar{z}}$ は ⑧ を中心とした半径 ⑨ の円周上を動く。

〔Ⅳ〕 n をあらかじめ指定する自然数として、「1つのコインを n 回続けて投げる」ことを1回の試行とする。この試行を次の(ア)のように記録する。

(ア) H (=表) が出るごとに、その直前に T (=裏) が連続して出た回数を記録する。

例えば、 $n = 3$ のとき：H, H, H なら 0, 0, 0；H, H, T なら 0, 0；H, T, H なら 0, 1；T, H, H なら 1, 0；H, T, T なら 0；T, H, T なら 1；T, T, H なら 2 と記録し、T, T, T なら空白(何も記録しない)とする。

次の をうめよ。

(1) $n = 5$ のとき、1回の試行の記録が

空白となる確率は ① ,

長さ2の列となる(すなわち、数字が2つ並ぶ)確率は ② ,

数字1だけからなる列となる確率は ③ である。

(2) 一般の n で、1回の試行の記録に現れる数字が、

0 だけとなる確率は $\frac{\text{④}}{2^n}$,

1 だけとなる確率は、 n が奇数のとき $\frac{\text{⑤}}{2^n}$,

n が偶数のとき $\frac{\text{⑥}}{2^n}$,

4 種類以上となる確率が正であるための必要十分条件は ⑦ $\leq n$ である。

(3) $n = 10$ のとき、1回の試行の記録に現れる数字が1種類となる確率は

$\frac{\text{⑧}}{2^{10}}$ である。

(4) $n = 20$ のとき、1回の試行の記録に、0, 1, 2, 3 の数字がすべて2回以上現れる確率を分子が奇数である分数で表せば、分母は $2^{\text{⑨}}$, 分子は ⑩ である。

(以 上)