

2005 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(HB)〈シャープペンシルは、HB 0.5 mm以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し、切取線より切り離してください。
4. 試験時間は 90 分です。
5. 問題は 1 ～ 4 ページ目にあり 4 問で、余白は計算用紙です。

〔 I 〕 a を $0 < a < \frac{\pi}{2}$ を満たす定数とし、

$$F(x) = \int_0^x (t - a) \sin t \, dt \quad (0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi)$$

とおく。

(1) $F(x)$ の $0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ における最大値と最小値をそれぞれ a を用いて表せ。

(2) (1) で求めた最大値と最小値の積を最小にする a の値を求めよ。

〔Ⅱ〕 次の問いに答えよ。

(1) 次の をうめよ。

(ア) xy 平面上の点 $P(x, y)$ を原点を中心として反時計まわりに $\frac{\pi}{4}$ 回転した点を $Q(X, Y)$ とする。点 Q の極座標を (r, θ) とすると、点 P の極座標は $(r, \theta - \frac{\pi}{4})$ と表される。

x, y を X, Y を用いて表すと

$$x = \text{①}, \quad y = \text{②}$$

となる。

(イ) 点 $P(x, y)$ の座標が

$$3x^2 - 6xy + 3y^2 - 2\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}y = 16$$

を満たすとき、 $P(x, y)$ を原点を中心として反時計まわりに $\frac{\pi}{4}$ 回転した点 $Q(X, Y)$ の座標は $Y = AX^2 + BX + C$ を満たす。

ただし、 A, B, C は定数である。

$$\text{このとき、} A = \text{③}, \quad B = \text{④}, \quad C = \text{⑤} \text{ である。}$$

(2) 曲線 $3x^2 - 6xy + 3y^2 - 2\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}y = 16$ 、半直線 $y = x$ ($x \geq 0$)、および x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

〔Ⅲ〕 1 から 9 までの数字が書かれたカードが 1 枚ずつ、合わせて 9 枚のカードがある。この中から同時に 3 枚のカードを抜き出す。

抜き出したカードに書かれている 3 つの数字について、次の をうめよ。

- (1) 数字の積が 5 の倍数である確率は ① である。
- (2) 数字の積が偶数である確率は ② である。
- (3) 数字の和が偶数である確率は ③ である。
- (4) 最大の数字が 7 である確率は ④ である。
- (5) 数字の積が 10 の倍数である確率は ⑤ である。

〔IV〕 次の をうめよ。

(1) 不等式

$$2 \cdot 4^{x+1} - 2^{x+1} - 1 < 0$$

の解は ① である。

(2) 座標平面上で、始点が原点であるベクトル $\vec{a} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$ を原点を中心、正の方向に 90° 回転したベクトルを $\vec{b}$ とする。

このとき

$$\left(\frac{7}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}} \right) = \text{ ② } \vec{a} + \text{ ③ } \vec{b}$$

である。

(3) x, y は実数で $3x^2 + 2y^2 = -2x$ を満たすとき、

$x^2 + y^2$ の最大値は ④ である。

(4) 複素数 $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + i} \right)^8$ の実部は ⑤ , 虚部は ⑥ である。

ただし、 i は虚数単位である。

(5) $\begin{pmatrix} a & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列が $\begin{pmatrix} 1 & x \\ b & y \end{pmatrix}$ であるとき、

$x = \text{ ⑦ } , y = \text{ ⑧ }$ である。

(以 上)