

[I]

① $2 + \sqrt{7}$

② $\sqrt{7} - 2$

③ $\sqrt{7}$

④ 2

⑤ $2 + \sqrt{7}$

⑥ $2\sqrt{7}$

[II]

$$\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{1+|3x-4|} + \log_4 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{1+|3x-4|} = -\log_4 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_4 \sqrt{1+|3x-4|}}{\log_4 \frac{1}{2}} = \log_4 3^{-1}$$

$$\Leftrightarrow -2 \log_4 \sqrt{1+|3x-4|} = \log_4 3^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \log_4 (1+|3x-4|)^{\frac{1}{2} \times (-2)} = \log_4 3^{-1}$$

$$\Leftrightarrow (1+|3x-4|)^{-1} = 3^{-1}$$

$$\Leftrightarrow 1+|3x-4| = 3$$

$$\Leftrightarrow |3x-4| = 2$$

$$\therefore \text{よって、} \quad 3x-4 = \pm 2 \quad \text{より}$$

$$3x = 4 \pm 2$$

$$= 6, 2$$

$$\text{よって} \quad \underline{x = 2, \frac{2}{3}} \dots (\text{答})$$

[Ⅲ]

$$(1) \quad C_1: y = x^2 + a \quad \dots \textcircled{1}$$

$$C_2: y = -x^2 + 2ax - a^2 + 2a + 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

①=②とすると

$$x^2 + a = -x^2 + 2ax - a^2 + 2a + 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2ax + a^2 - a - 1 = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

この式が異なる2解を持つことから、判別式をDとおくと、

$$\frac{D}{4} = (-a)^2 - 2 \cdot (a^2 - a - 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow -a^2 + 2a + 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \{a - (1 + \sqrt{3})\} \{a - (1 - \sqrt{3})\} < 0$$

$$\therefore \underline{1 - \sqrt{3} < a < 1 + \sqrt{3}} \quad \dots (\text{答})$$

(2) ③より、 C_1 と C_2 の交点のx座標は

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2(a^2 - a - 1)}}{2}$$

これを α , β ($\beta > \alpha$) とおく。

求めるべき面積をSとおくと、

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \{(-x^2 + 2ax - a^2 + 2a + 1) - (x^2 + a)\} dx$$

$$= -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx$$

$$= -2 \times \left(-\frac{1}{6}\right) \times (\beta - \alpha)^3$$

$$S = \frac{1}{3} \left\{ \frac{a + \sqrt{-a^2 + 2a + 2}}{2} - \frac{a - \sqrt{-a^2 + 2a + 2}}{2} \right\}^3$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{3} (-a^2 + 2a + 2)^{\frac{3}{2}}}} \quad \dots \dots (\text{答})$$

$$(3) \quad S = \frac{9}{8} \text{ より}$$

$$\frac{1}{3} (-a^2 + 2a + 2)^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{8}$$

$$\Leftrightarrow (-a^2 + 2a + 2)^{\frac{3}{2}} = \frac{27}{8}$$

$$\Leftrightarrow (-a^2 + 2a + 2)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$$

両辺を2乗すると

$$-a^2 + 2a + 2 = \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2a + \frac{1}{4} = 0$$

$$\therefore a = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \dots \dots \textcircled{4}$$

$$1 - \sqrt{3} < 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 + \sqrt{3} \text{ より } \textcircled{4} \text{ は}$$

(1) の条件を満たしている。

したがって、求めるべきaの値は

$$\underline{\underline{a = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}}} \quad \dots \dots (\text{答})$$