[1]

(1) $I=\int \frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}dx=\int (a^2-x^2)^{-\frac{3}{2}}dx \quad (a>0)$

$x=a\sin t$

$\frac{dx}{dt}=a\cos t \Leftrightarrow dx=a\cos t\,dt$

$I=\int (a^2-a^2\sin^2 t)^{-\frac{3}{2}}\cdot a\cos t\,dt$

$=a^{-2}\int \frac{1}{\cos^2 t}dt=\underline{\underline{\frac{1}{a^2}\tan t+C}}$ （Cは積分定数）

(2) $x=a\sin t$ より, $\sin t=\frac{x}{a}$, $a^2\cos^2 t=a^2-a^2\sin^2 t=a^2-x^2$

$I=\frac{1}{a^2}\tan t+C=\frac{1}{a}\sin t\cdot\frac{1}{a\cos t}+C$

$=\underline{\underline{\frac{x}{a^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}+C}}$ （$\because -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ より $\cos t>0$）

(3) $f(x)=\frac{a^4}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$ は $f(0)=a^{\frac{5}{3}}(>1)$で, $0\leqq x\leqq 1$において単調増加な連続関数であるから

$S(a)=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 \frac{a^4}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}dx$

$=\left[a^4\cdot\frac{x}{a^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\right]_0^1=\underline{\underline{\frac{a^2}{\sqrt{a^2-1}}}}$

$S(a)=a^2(a^2-1)^{-\frac{1}{2}}$

$S'(a)=2a(a^2-1)^{-\frac{1}{2}}+a^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(a^2-1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2a$

$=a(a^2-1)^{-\frac{3}{2}}\{2(a^2-1)-a^2\}$

$=a(a^2-1)^{-\frac{3}{2}}(a^2-2)$

$=a(a^2-1)^{-\frac{3}{2}}(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})$

a	1		$\sqrt{2}$		
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$	$(+\infty)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$(+\infty)$

$S(a)$は $a=\sqrt{2}$のとき, <u>極小値</u>

$S(\sqrt{2})=\frac{2}{\sqrt{2-1}}=\underline{2}$

をとる.

[II]

$A(0,3,1),\ B(1,0,0),\ C(2,1,1),\ D(-1,0,0)$

(1) $\overrightarrow{CA}=\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix},\ \overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

ゆえに、 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}=(-2)\cdot(-1)+2\cdot(-1)+0\cdot(-1)=\underline{\underline{0}}$

(2) $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ $(a>0)$ とおくと、

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{CA}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow -2a+2b=0 \Leftrightarrow b=a$ ……①

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow -a-b-c=0 \Leftrightarrow c=-(a+b)$ ……②

$|\vec{n}|^2=1 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=1$ ……③

①,②,③より $a=b=\frac{1}{\sqrt6},\ c=-\frac{2}{\sqrt6}$

よって、

$$\underline{\underline{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}}}$$

(3) $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+s\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{CB}$

$=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2s-t\\1+2s-t\\1-t\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OD}=\begin{pmatrix}3-2s-t\\1+2s-t\\1-t\end{pmatrix}$

よって、 $|\overrightarrow{DP}|^2=(3-2s-t)^2+(1+2s-t)^2+(1-t)^2$

$=(9+4s^2+t^2-12s-6t+4st)+(1+4s^2+t^2+4s-2t-4st)+(1-2t+t^2)$

$=11+8s^2+3t^2-8s-10t$

$=8(s^2-s)+3(t^2-\frac{10}{3}t)+11$

$=8(s-\frac12)^2+3(t-\frac53)^2-2-\frac{25}{3}+11$

$=8(s-\frac12)^2+3(t-\frac53)^2+\frac23$

点Pは平面π上を任意に動くので、 s,tは任意の実数をとる

ゆえに、 $|\overrightarrow{DP}|^2$ は $s=\frac12,\ t=\frac53$ のとき、最小値 $\frac23\left(=\frac46\right)$

$|\overrightarrow{DP}|$ は 〃 〃 $\frac{2}{\sqrt6}=\underline{\underline{\frac{\sqrt6}{3}}}$ をとる。

(4) $s=\frac12,\ t=\frac53$ のとき、

$\overrightarrow{DP}=\begin{pmatrix}3-2\cdot\frac12-\frac53\\1+2\cdot\frac12-\frac53\\1-\frac53\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac13\\\frac13\\-\frac23\end{pmatrix}=\frac13\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=\frac{2}{\sqrt6}\vec{n}$

より、このとき、 $\overrightarrow{DP}\perp\pi$ 。よって、四面体ABCDの面積をVとすると、

$V=\frac13\cdot|\overrightarrow{DP}|\cdot\triangle ABC$

$=\frac13\cdot\frac{2}{\sqrt6}\cdot\frac12\sqrt{|\overrightarrow{CA}|^2|\overrightarrow{CB}|^2-(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB})^2}$

$=\frac13\cdot\frac{1}{\sqrt6}\cdot\sqrt{8\cdot3}=\frac13\cdot\frac{1}{\sqrt6}\cdot2\sqrt6$

$=\underline{\underline{\frac23}}$

[III]

(1) ① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{2}{3}$

(2) ③ $\frac{3}{5}p_n + \frac{1}{15}$

(3) ④ $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{6}$

(4) $\frac{5}{4}$

[IV]

(1) ① 2 ② 4

(2) ③ 360

(3) ④ -3

(4) ⑤ $\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{3},\ 1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ⑥ $\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{3},\ 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (⑤,⑥は順不同)

(5) ⑦ $\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left(1-\frac{x}{2}\right)$