

2006 年度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(HB)〈シャープペンシルは、HB 0.5 mm以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し、切取線より切り離してください。
4. 試験時間は 90 分です。
5. 問題は 1 ～ 3 ページ目にあり 4 問で、余白は計算用紙です。

〔Ⅰ〕 次の問いに答えよ。ただし、 $a > 0$ とする。

(1) $I = \int \frac{1}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} dx$ を $x = a \sin t$ と置換して、 I を $\tan t$ を用いて表せ。

ただし、 t は $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ で考えてよい。

(2) I を x で表せ。

(3) $a > 1$ とする。曲線 $y = \frac{a^4}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$ ($0 \leq x \leq 1$) と x 軸、 y 軸および直

線 $x = 1$ で囲まれた部分の面積 $S(a)$ を求めよ。さらに、 a が $a > 1$ の範囲で変化するとき、 $S(a)$ の極値を求めよ。

〔Ⅱ〕 O を原点とする空間内に 4 点 $A(0, 3, 1)$, $B(1, 0, 0)$, $C(2, 1, 1)$, $D(-1, 0, 0)$ があるとき、次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{CA}$ と $\overrightarrow{CB}$ の内積 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{CA}$ と $\overrightarrow{CB}$ の両方に垂直な単位ベクトル $\vec{n}$ で x 成分が正であるものを求めよ。

(3) A , B , C を含む平面 π 上の点 P は、媒介変数 s , t によって、
 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + s\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB}$ と表される。 P が π 上を動くとき、 $|\overrightarrow{DP}|$ の最小値を求めよ。

(4) 四面体 $ABCD$ の体積を求めよ。

〔Ⅲ〕 赤色のボールが1つ、白色のボールが5つ、合わせて6つのボールがあり、これらが横1列に並べてある。また、1から6までの数字が1つずつ書かれた6枚のカードがある。これら6枚のカードから2枚を同時に取り出し、取り出したカードに書かれている数字が i と j であるときには、左から i 番目のボールと左から j 番目のボールを入れ替えて、取り出したカードはもとに戻すという操作を行う。赤いボールは最初左端にあった。この操作を n 回行った後に、赤いボールが左端にある確率を p_n とする。このとき、次の をうめよ。

- (1) (イ) 1度目に選ばれた2枚のカードに書かれている2つの数字と、2度目に選ばれた2枚のカードに書かれている2つの数字が同じである確率は

① である。

(ロ) $p_1 =$ ② である。

- (2) p_{n+1} を p_n を用いて表すと、 $p_{n+1} =$ ③ となる。

- (3) p_n を n を用いて表すと、 $p_n =$ ④ となる。

- (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(p_n - \frac{1}{6} \right) =$ ⑤ である。

〔Ⅳ〕 次の をうめよ。

(1)
$$\begin{cases} (\log_2 x)^3 + (\log_{\frac{1}{4}} y)^3 = 0 \\ \log_2 x^2 + \log_2 y^3 = 8 \end{cases}$$
 を満たす正の数 x, y は $x =$ ① ,

$y =$ ② である。

(2) 異なる 6 個の球を 3 個, 2 個, 1 個の 3 組に分けて 3 人に 1 組ずつ与える方法は ③ 通りある。

(3) 実数 x が $x^3 + \frac{1}{x^3} = -18$ を満たすとき, $x + \frac{1}{x}$ の値は ④ である。

(4) 座標平面上に正三角形 OAB がある。O を原点, $A = (-1, 2)$ とすると, 頂点 B の座標は ⑤ または ⑥ である。

(5) $\int_0^{2x} f(t) dt = xe^{-x}$ を満たす連続関数 $f(x)$ は ⑦ である。

(以 上)