

[I] (1)  $\log_2 x$  の底 2 は 1 より大きいので

$$\frac{1}{16} \leq x \leq 8 \text{ より}$$

$$\log_2 \frac{1}{16} \leq \log_2 x \leq \log_2 8$$

$$\Leftrightarrow \log_2 2^{-4} \leq \log_2 x \leq \log_2 2^3$$

$$\Leftrightarrow -4 \leq \log_2 x \leq 3$$

(2)  $\log_2 x = t$  とおくと, (1)より  $-4 \leq t \leq 3$  ..... ①

$$\begin{aligned} f(x) &= (\log_2 x)^3 - 2\log_2 x + 5(\log_{\sqrt{2}} 2 - \log_{\sqrt{2}} x) \\ &= (\log_2 x)^3 - 2\log_2 x + 5\left(\log_{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^2 - \frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

$$= (\log_2 x)^3 - 12\log_2 x + 10$$

$$f(x) = g(t) \text{ とおくと, } g(t) = t^3 - 12t + 10$$

$$g'(t) = 3t^2 - 12 = 3(t+2)(t-2)$$

①より  $g(t)$  の増減表は下表のようになる.

|         |    |     |    |     |    |     |   |
|---------|----|-----|----|-----|----|-----|---|
| $t$     | -4 | ... | -2 | ... | 2  | ... | 3 |
| $g'(t)$ |    | +   | 0  | -   | 0  | +   |   |
| $g(t)$  | -6 | ↗   | 26 | ↘   | -6 | ↗   | 1 |

したがって,  $f(x) = g(t)$  は

$t = -2$  のとき最大値  $g(-2) = 26$  をとり, このとき

$$\log_2 x = -2 \text{ より } x = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

また

$t = -4, 2$  のとき最小値  $g(-4) = g(2) = -6$  をとり, このとき

$$\log_2 x = -4 \text{ または } \log_2 x = 2 \text{ より } x = \frac{1}{16}, 4$$

[II] (1) 三角形の3辺の長さを $a, b, c$ とすると、三角形の成立条件は

$$\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \end{cases} \dots \textcircled{1} \quad \text{かつ} \quad \begin{cases} |a-b| < c < a+b \\ |b-c| < a < b+c \\ |c-a| < b < c+a \end{cases} \dots \textcircled{2}$$

である.

①について,

$$2x-2=2(x-1)>0, x+3>0, x^2-3x+6=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0$$

より,  $x>1 \dots \textcircled{3}$

(i)  $2x-2=x^2-3x+6$  と仮定すると,

$$x^2-5x+8=0 \iff \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{7}{4}=0$$

となり,  $x$  が実数であることに矛盾する.

(ii)  $2x-2=x+3$  と仮定すると,  $x=5$  より

三角形の3辺の長さは8, 8, 16となるが,  $16=8+8$  より  
条件②を満たさず, 不適当.

(iii)  $x+3=x^2-3x+6$  と仮定すると,  $(x-1)(x-3)=0$  で

③より  $x=3$ . このとき三角形の3辺の長さは6, 6, 4となって  
②を満たす.

以上より,  $x=3$

(2) 次図のように, 三角形の高さを $h$ とおくと  
三角形の面積 $S$ は

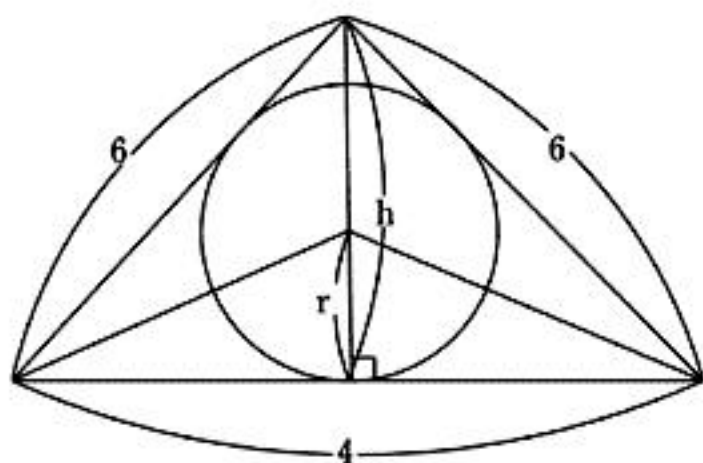
$$S=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot \sqrt{6^2-\left(\frac{4}{2}\right)^2}=8\sqrt{2}$$

一方

$$S=\frac{1}{2}(4+6+6)r=8r$$

ゆえに,  $8r=8\sqrt{2}$

よって,  $r=\sqrt{2}$



(3) 下図のように $\theta$ を定義すると, 余弦定理より

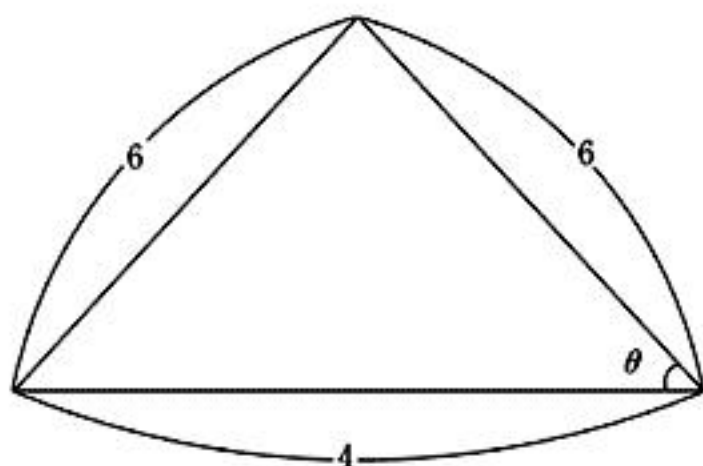
$$\cos\theta=\frac{4^2+6^2-6^2}{2\cdot 4\cdot 6}=\frac{1}{3}$$

$0^\circ<\theta<180^\circ$  より  $\sin\theta>0$  であるから

$$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって, 正弦定理より

$$R=\frac{6}{2\sin\theta}=3\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}}=\frac{9\sqrt{2}}{4}$$



$$\begin{array}{lll}
 \text{[III]} & \textcircled{1} & -\frac{a}{2} \\
 & \textcircled{2} & \frac{b}{2} \\
 & \textcircled{3} & bx^2 + ax + 2 \\
 & \textcircled{4} & -2 \\
 & \textcircled{5} & -1 \\
 & \textcircled{6} & 2
 \end{array}$$