

$$[I] \quad f(x) = xe^{-x}$$

$$(1) \quad f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} \\ = e^{-x}(1-x)$$

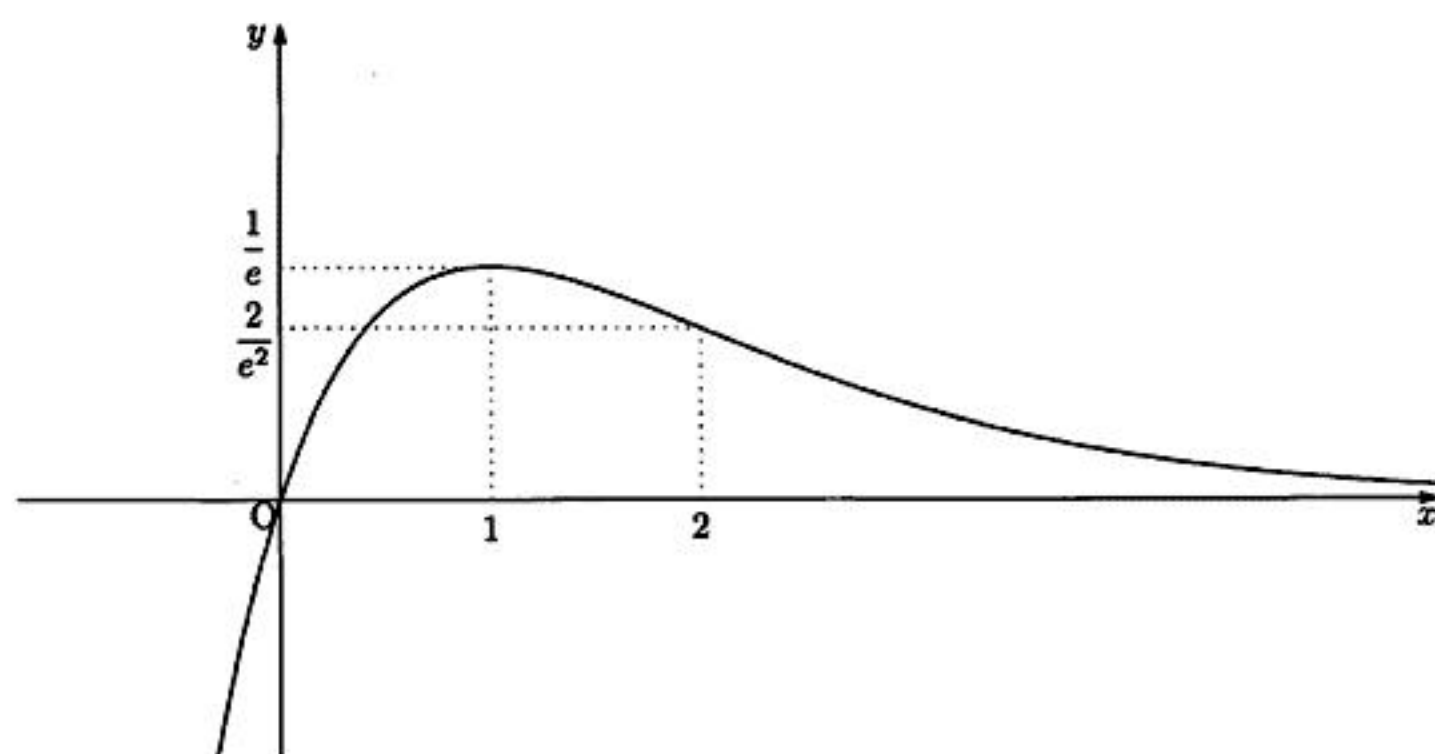
$$f''(x) = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} \\ = (x-2)e^{-x}$$

(※ e^{-x} は正)

したがって、増減表は下の通り。

x	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	-	-
$f''(x)$	-	-	-	0	+
$f'(x)$		$\frac{1}{e}$		$\frac{2}{e^2}$	

これより、 C のグラフは下図のようになる。



(2) $f'(a) = e^{-a}(1-a)$ より、 l_a の方程式は

$$y = e^{-a}(1-a)(x-a) + f(a) \\ = e^{-a}(1-a)x - e^{-a}(1-a)a + ae^{-a} \\ = e^{-a}(1-a)x + a^2e^{-a}$$

よって

$$g_a(x) = e^{-a}(1-a)x + a^2e^{-a}$$

(3) $x \leq 2$ の範囲で、 C のグラフは上に凸なので

$$S(a) = \int_{-1}^2 \{g_a(x) - f(x)\} dx \\ = \int_{-1}^2 \{e^{-a}(1-a)x + a^2e^{-a} - xe^{-x}\} dx \\ = \left[\frac{1}{2}e^{-a}(1-a)x^2 + a^2e^{-a}x + xe^{-x} + e^{-x} \right]_{-1}^2 \\ = 2e^{-a}(1-a) + 2a^2e^{-a} + 3e^{-2} - \left\{ \frac{1}{2}e^{-a}(1-a) - a^2e^{-a} \right\} \\ = \frac{3}{2}e^{-a}(1-a) + 3a^2e^{-a} + 3e^{-2} \\ = \frac{3}{2}e^{-a}(2a^2 - a + 1) + 3e^{-2}$$

$T(a) = e^{-a}(2a^2 - a + 1)$ とおく。

$$T'(a) = -e^{-a}(2a^2 - a + 1) + e^{-a}(4a - 1) \\ = -e^{-a}(2a^2 - 5a + 2) \\ = -e^{-a}(2a - 1)(a - 2)$$

したがって、 $a \leq 2$ の範囲で増減表は下の通り。

a	...	$\frac{1}{2}$	...	2
$T'(a)$	-	0	+	0
$T(a)$				

これより、 $a = \frac{1}{2}$ で $T(a)$ は最小であり、このとき $S(a)$ も最小となる。

$S(a)$ を最小にする a の値は $a = \frac{1}{2}$

$$[\text{II}] \quad r(\theta) = \frac{\sqrt{2} - (2\sqrt{2} - 2)\sin\theta}{4\sin\theta(1 - \sin\theta)}$$

$$(1) \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ の範囲で, } 0 < \sin\theta < 1$$

$$\text{よって, } 4\sin\theta(1 - \sin\theta) > 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

また, $\sin\theta < 1$ より

$$(2\sqrt{2} - 2)\sin\theta < 2\sqrt{2} - 2$$

$$-(2\sqrt{2} - 2)\sin\theta > -2\sqrt{2} + 2$$

$$\sqrt{2} - (2\sqrt{2} - 2)\sin\theta > -\sqrt{2} + 2 > 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② より, $r(\theta)$ の分母・分子ともに正なので, $r(\theta) > 0$ ■

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が存在するための条件は, $r(\theta) < 1$ である。((1) より, $r(\theta) > 0$ であるため)

$$r(\theta) < 1$$

$$\iff \frac{\sqrt{2} - (2\sqrt{2} - 2)\sin\theta}{4\sin\theta(1 - \sin\theta)} < 1$$

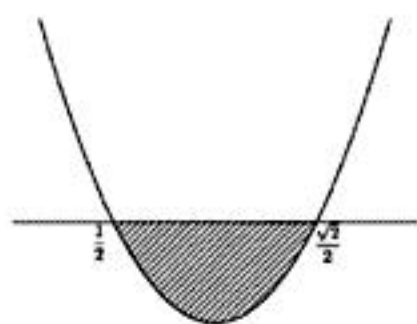
$$\iff \sqrt{2} - (2\sqrt{2} - 2)\sin\theta < 4\sin\theta(1 - \sin\theta) \quad ((1)\text{より分母は正})$$

$$\iff 4\sin^2\theta - (2\sqrt{2} + 2)\sin\theta + \sqrt{2} < 0$$

$$\iff (2\sin\theta - 1)(2\sin\theta - \sqrt{2}) < 0$$

$$\iff \frac{1}{2} < \sin\theta < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

よって, θ の値の範囲は, $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{4}$



(3) $0 < r(\theta) < 1$ のもとで

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \frac{1}{1 - r(\theta)} \\ &= \frac{4x(1 - x)}{4x(1 - x) - \sqrt{2} + (2\sqrt{2} - 2)x} \\ &= \frac{4x(1 - x)}{-4x^2 + (2\sqrt{2} + 2)x - \sqrt{2}} \\ &= \frac{4x^2 - 4x}{4x^2 - (2\sqrt{2} + 2)x + \sqrt{2}} \end{aligned}$$

[III]

(1) 和が偶数になるのは

3回とも偶数 ... (ア)

1回偶数で、残りの2回が奇数 ... (イ)

の2通りの場合がある。

1回の試行で 偶数が出る確率は $\frac{n}{2n+1}$

奇数が出る確率は $\frac{n+1}{2n+1}$ である。

(ア) の確率は $\left(\frac{n}{2n+1}\right)^3 = \frac{n^3}{(2n+1)^3}$

(イ) の確率は ${}_3C_1 \times \left(\frac{n}{2n+1}\right) \times \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^2 = \frac{3n(n+1)^2}{(2n+1)^3}$

よって、求める確率は $\frac{n^3 + 3n(n+1)^2}{(2n+1)^3} = \frac{n(4n^2 + 6n + 3)}{(2n+1)^3} \dots \textcircled{1}$

(2)

(i) $X=1$ である確率は $\frac{1}{(2n+1)^3} \dots \textcircled{2}$

$X \leq 2$ となるためには、3回とも2以下の目が出ればよいので、確率は

$$\left(\frac{2}{2n+1}\right)^3 = \frac{8}{(2n+1)^3} \dots \textcircled{3}$$

(ii) $X \leq r$ となる確率は

$$\left(\frac{r}{2n+1}\right)^3 = \frac{r^3}{(2n+1)^3} \dots \textcircled{4}$$

$X=r$ となる確率は、 $X \leq r$ となる確率から $X \leq r-1$ となる確率を引けばよく

$$\frac{r^3}{(2n+1)^3} - \frac{(r-1)^3}{(2n+1)^3} = \frac{3r^2 - 3r + 1}{(2n+1)^3} \dots \textcircled{5}$$

(iii) $2n+1=N$ とおく。

X の期待値を $E(X)$ とすると

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{r=1}^N \frac{3r^2 - 3r + 1}{N^3} \times r \\ &= \frac{1}{N^3} \sum_{r=1}^N (3r^3 - 3r^2 + r) \\ &= \frac{1}{N^3} \left[3 \cdot \frac{N^2(N+1)^2}{4} - 3 \cdot \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + \frac{N(N+1)}{2} \right] \\ &= \frac{1}{N^3} \cdot \frac{N(N+1)}{4} \cdot \{3N(N+1) - 2(2N+1) + 2\} \\ &= \frac{(N+1)(3N-1)}{4N} \\ &= \frac{(n+1)(3n+1)}{2n+1} \end{aligned}$$

よって ⑥に入るのは $(n+1)(3n+1)$

[IV]

(1) $x+y=1$ より, $y=(1-x)$

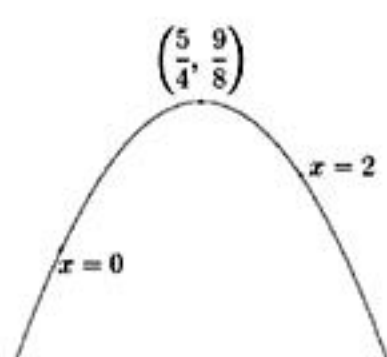
よって

$$\begin{aligned}x-2y^2 &= x-2(1-x)^2 \\&= -2x^2+5x-2 \\&= -2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{9}{8}\end{aligned}$$

よって

$$x=0 \text{ のとき, 最小値 } -2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$x=\frac{5}{4} \text{ のとき, 最大値 } \frac{9}{8} \quad \dots \textcircled{2}$$



(2) 条件より

$$\begin{aligned}A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \\A &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\&= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ 4 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

また

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -4 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{4}$$

(3) $\left(x^3 + \frac{3}{x^2}\right)^5 = \frac{1}{x^{10}}(x^5+3)^5$ であり, $(x^5+3)^5$ の展開式における x^{10} の係数は

$${}_5C_2 \times 3^3 = 270$$

よって, 求める定数項は 270 $\dots \textcircled{5}$

(4) $ka_n + (2-k)a_{n-1} = 1$

より

$$\begin{aligned}k\left(a_n - \frac{1}{2}\right) + (2-k)\left(a_{n-1} - \frac{1}{2}\right) &= 0 \\k \neq 0 \text{ より } \left(a_n - \frac{1}{2}\right) &= \frac{k-2}{k}\left(a_{n-1} - \frac{1}{2}\right) \\&= \left(\frac{k-2}{k}\right)^{n-1}\left(a_1 - \frac{1}{2}\right) \\&= \frac{1}{2} \times \left(\frac{k-2}{k}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

よって

$$a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{k-2}{k}\right)^{n-1}$$

となり, これが収束するための条件は, $-1 < \frac{k-2}{k} \leq 1$

これを解いて, $k > 1$ $\dots \textcircled{6}$

このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{7}$$

(5) $\int_0^{\sinh} (1-2\cos 2t) dt = [t - \sin 2t]_0^{\sinh}$
 $= \sinh - \sin(2\sinh)$

よって

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^{\sinh} (1-2\cos 2t) dt &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sinh}{h} - \frac{\sin(2\sinh)}{h} \right\} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sinh}{h} - \frac{2\sinh}{h} \times \frac{\sin(2\sinh)}{2\sinh} \right\} \\&= 1-2 \\&= -1 \quad \dots \textcircled{8}\end{aligned}$$