

2007 年度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(HB)〈シャープペンシルは、HB 0.5 mm以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し、切取線より切り離してください。
4. 試験時間は 90 分です。
5. 問題は 1 ～ 3 ページ目にあり 4 問で、余白は計算用紙です。

〔Ⅰ〕 曲線 $C: y = f(x) = xe^{-x}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $y = f(x)$ の増減、凹凸を調べて C のグラフをかけ。
- (2) C 上の点 $(a, f(a))$ における接線を l_a とし、その方程式を $y = g_a(x)$ とおく。 $g_a(x)$ を求めよ。
- (3) $a \leq 2$ の範囲で、直線 l_a , $x = -1$, $x = 2$, および曲線 C で囲まれた領域の面積 $S(a)$ を求めよ。また、 $S(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

〔Ⅱ〕 θ を $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たす定数とし、

$$r(\theta) = \frac{\sqrt{2} - (2\sqrt{2} - 2)\sin \theta}{4\sin \theta(1 - \sin \theta)}$$

とする。次の問いに答えよ。

- (1) θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たすとき、 $r(\theta) > 0$ となることを示せ。
- (2) 自然数 n に対して、

$$S_n = 1 + r(\theta) + r(\theta)^2 + \cdots + r(\theta)^{n-1}$$

とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が存在するための θ の値の範囲を求めよ。

- (3) $x = \sin \theta$ とおく。 θ の値が(2)の範囲にあるとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を x を用いて表せ。

〔Ⅲ〕 n を正の整数とする。1 から $(2n+1)$ までの番号を 1 つずつ書いた $(2n+1)$ 枚のカードが箱の中に入っている。この箱の中からカードを 1 枚とり出してもとに戻すという試行を 3 回行う。このとき、次の をうめよ。

(1) 3 回の試行でとり出したカードの番号の和が偶数になる確率は ① である。

(2) 3 回の試行でとり出したカードの番号の中で最大のものを X とおく。このとき、

(i) X が 1 である確率は ② であり、 $X \leq 2$ となる確率は ③ である。

(ii) $r = 1, 2, 3, \dots, 2n+1$ に対して、 $X \leq r$ となる確率は ④ であり、 $X = r$ となる確率は ⑤ である。

(iii) X の期待値は $\frac{\text{⑥}}{2n+1}$ である。

〔Ⅳ〕 次の をうめよ。

(1) $x + y = 1$, $0 \leq x \leq 2$ のとき, $x - 2y^2$ の最小値は ① , 最大値は

② である。

(2) $A \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ を満たす 2×2 行列 A は,

$A =$ ③ , A の逆行列 A^{-1} は, $A^{-1} =$ ④ である。

(3) $\left(x^3 + \frac{3}{x^2}\right)^5$ を展開したときの定数項(x を含まない項)は ⑤ である。

(4) k は実数の定数で $k \neq 0$ とする。 $a_1 = 1$, $ka_n + (2 - k)a_{n-1} = 1$,
($n = 2, 3, 4, \dots$) を満たす数列 $\{a_n\}$ は, k の値の範囲が ⑥ であるとき

収束し, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$ ⑦ である。

(5) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^{\sin h} (1 - 2 \cos 2t) dt$ の値は ⑧ である。

(以 上)