

I

(1)

因数分解すると, (答) $x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y$

(2)

$k \neq -1$ より, 条件 $x^3 + y^3 + 1 - 3xy = 0$ は (1) の結果から,

$x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y = 0$ と同値.

ここで, $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = k^2$ であるから, 2つの式から $x^2 + y^2$ を消去すると,

$$\begin{aligned} k^2 - 2xy + 1 - xy - (x+y) &= 0 \\ 3xy &= k^2 - k + 1 \\ xy &= \frac{1}{3}(k^2 - k + 1) \end{aligned}$$

実数 x, y が存在する条件は, 変数 t を用いて, 2次方程式

$$t^2 - (x+y)t + xy = 0$$

の判別式 D が 0 以上と同値である.

$x+y=k, xy=\frac{1}{3}(k^2-k+1)$ を代入して判別式 D を計算すると,

$$\begin{aligned} D &= k^2 - \frac{4}{3}(k^2 - k + 1) \\ &= -\frac{1}{3}(k^2 - 4k + 4) \\ &= -\frac{1}{3}(k-2)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

となり, $(k-2)^2 \leq 0$ を満たす k は $k=2$ である.

このとき $x+y=2, xy=1$ より $x=1, y=1$ である.

よって, (答) $k=2, x=1, y=1$

II

①	$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$
②	$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$
③	$2\sqrt{2}$
④	15
⑤	75
⑥	$2\sqrt{2}$
⑦	180
⑧	$1-\sqrt{3}$

III

①	$-\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}$
②	$-\frac{1}{2a} - a$
③	$\frac{1}{48a^3} + \frac{1}{4a} + a + \frac{4}{3}a^3$
④	$2ax + \frac{1}{4a^2} + 3a^2 + 2$
⑤	$\frac{1}{2a} + 3a$
⑥	$\frac{1}{6a^3} + \frac{2}{a} + 8a + \frac{32}{3}a^3$
⑦	8