

I

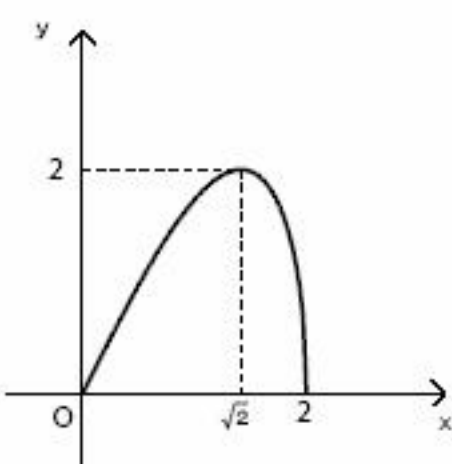
(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{4-x^2} + x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{4-x^2}} \\ &= \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} \end{aligned}$$

であり, $0 \leq x \leq 2$ で $f'(x) = 0$ となる x は, $x = \sqrt{2}$.
 よって増減表は以下のとおり.

x	0		$\sqrt{2}$		2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

グラフは以下の図のようになる.



これらから,

(答) $\alpha = \sqrt{2}, \beta = 2$

(2)

求める面積を S と置くと,

$$S = \int_0^2 x\sqrt{4-x^2} dx$$

と書ける. ここで $x = 2\sin\theta$ と置換すると,

$$\frac{dx}{d\theta} = 2\cos\theta$$

x	$0 \rightarrow 2$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$

より,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\theta \cdot 2\cos\theta \cdot 2\cos\theta d\theta \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos^2\theta d\theta \\ &= 8 \left[-\frac{1}{3} \cos^3\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 8 \left(0 + \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

よって,

(答) $\frac{8}{3}$

(3)

求める体積を V と置くと,

$$V = \int_0^2 \pi x^2 dy$$

と書ける. ここで $y = x\sqrt{4-x^2}$ であるから,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

y	$0 \rightarrow 2$
x	$0 \rightarrow \sqrt{2}$

より,

$$V = \pi \int_0^{\sqrt{2}} x^2 \cdot \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

となる. ここで $x = 2\sin\theta$ と置換すると,

$$\frac{dx}{d\theta} = 2\cos\theta$$

x	$0 \rightarrow \sqrt{2}$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$

より,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\sin^2\theta \cdot \frac{4-8\sin^2\theta}{2\cos\theta} \cdot 2\cos\theta d\theta \\ &= 16\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta (1-2\sin^2\theta) d\theta \\ &= 16\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta d\theta - 32\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4\theta d\theta \\ &= 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 - \cos 2\theta d\theta - 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3}{2} - 2\cos 2\theta + \frac{1}{2}\cos 4\theta d\theta \\ &= 8\pi \left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - 8\pi \left[\frac{3}{2}\theta - \sin 2\theta + \frac{1}{8}\sin 4\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 8\pi \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) - 8\pi \left(\frac{3}{8}\pi - 1 \right) \\ &= \pi(4-\pi) \end{aligned}$$

よって,

(答) $\pi(4-\pi)$

II

(1)

二つ目の式の両辺対数をとって,

$$\begin{aligned}\log a_{n+1} + \frac{1}{2} \log a_{n-1} &= \log a_n + \frac{1}{2} \log a_n \\ \log a_{n+1} - \log a_n &= \frac{1}{2} \log a_n - \frac{1}{2} \log a_{n-1} \\ \log \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{1}{2} \log \frac{a_n}{a_{n-1}}\end{aligned}$$

$b_n = \log \frac{a_{n+1}}{a_n}$ であるので,

$$\text{(答)} \quad \underline{b_n = \frac{1}{2} b_{n-1}}$$

(2)

$b_1 = \log \frac{a_2}{a_1} = \log e = 1$ である.

よって b_n は初項 1, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるので,

$$\text{(答)} \quad \underline{b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

(3)

$$\begin{aligned}b_n &= \log \frac{a_{n+1}}{a_n} \\ &= \log a_{n+1} - \log a_n\end{aligned}$$

であるので, $\log a_n = c_n$ と置けば, b_n は c_n の階差数列である.

$c_1 = \log a_1 = 0$ より, $n \geq 2$ において,

$$\begin{aligned}c_n &= c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 2 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\}\end{aligned}$$

これは $n = 1$ のときも成り立つ.

$$\log a_n = \log e^{2 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\}}$$

であるから,

$$\text{(答)} \quad \underline{a_n = e^{2 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\}}}$$

(4)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{2 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\}} = e^2$$

よって (答) $\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^2}$

III

①	-12
②	-6
③	9
④	-2
⑤	$\frac{4^n - 1}{3}x + \frac{4 - 4^n}{3}$
⑥	$\frac{4^n + 2}{3}$

IV

①	$\frac{7}{6}\pi$
②	$\frac{-3 + \sqrt{17}}{2} < x \leq 3$
③	$\log \frac{3}{2}$
④	$\frac{5}{12}$
⑤	$\frac{1}{8}$
⑥	$\sqrt{3}$