

2008 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(HB)〈シャープペンシルは、HB 0.5 mm以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し、切取線より切り離してください。
4. 試験時間は 90 分です。
5. 問題は 1 ～ 3 ページ目にあり 4 問で、余白は計算用紙です。

〔Ⅰ〕 x が $0 \leq x \leq 2$ の範囲を動くとき、 $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ が最大値をとるときの x の値を α 、その最大値を β とする。以下の問いに答えよ。

- (1) α および β の値を求めよ。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq 2$) と x 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ。
- (3) 曲線 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq \alpha$)、直線 $y = \beta$ および y 軸で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

〔Ⅱ〕 正の数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 1, \quad a_2 = e$$

$$a_{n+1}\sqrt{a_{n-1}} = a_n\sqrt{a_n} \quad (n \geq 2)$$

を満たす。ただし、 e は自然対数の底である。以下の問いに答えよ。

- (1) $b_n = \log \frac{a_{n+1}}{a_n}$ とおくとき、 b_n を b_{n-1} を用いて表せ。
- (2) (1) の b_n を n を用いて表せ。
- (3) a_n を n を用いて表せ。
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

〔Ⅲ〕 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ c & 3 \end{pmatrix}$ とする。また、 E は単位行列、 O は零行列とする。以下の
 をうめよ。

(1) $A \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \end{pmatrix}$ が成立するような x_1 が存在するとき、 c の値は
 $c =$ ① である。

(2) $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であって $A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が成立するような $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ が存在する
 とき、 c の値は $c =$ ② である。

(3) $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ とすると、 $y = -x$ を満たすすべての x, y について x', y' が
 $y' = 2x'$ を満たす。このとき、 c の値は $c =$ ③ である。

(4) $A^2 - 5A + 4E = O$ が成立するとき、 c の値は $c =$ ④ である。また、
 $n \geq 2$ のとき、 x^n を $x^2 - 5x + 4$ で割ると余りは ⑤ であるから、
 $c =$ ④ のとき $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ とおくと $a_n =$ ⑥ である。

〔Ⅳ〕 次の をうめよ。

(1) $0 \leq x < 2\pi$ のとき、 $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 1$ を満たす x は、 $x = \frac{\pi}{2}$ と $x = \text{①}$ である。

(2) 不等式 $\sqrt{3-x} < x+1$ を解くと ② である。

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2 + \sin^2 x} dx$ の値は ③ である。

(4) 3つのサイコロを同時に投げるとき、ちょうど2つのサイコロが同じ目になる確率は ④ であり、3つとも4以上の目になる確率は ⑤ である。

(5) a, b, c を $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ を満たす実数とすると、 $a + b + c$ の最大値は ⑥ である。

(以 上)