

[I]

①	$\frac{ab}{2} - a - b$	②	8	③	12	④	5
⑤	13	⑥	8	⑦	6	⑧	10

[II]

(1) $(x^2 + y^2 - 4y)(x^2 + y^2 - 10y + 24) \leq 0$ より

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y \geq 0 & \dots \textcircled{1} \\ \text{かつ} \\ x^2 + y^2 - 10y + 24 \leq 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

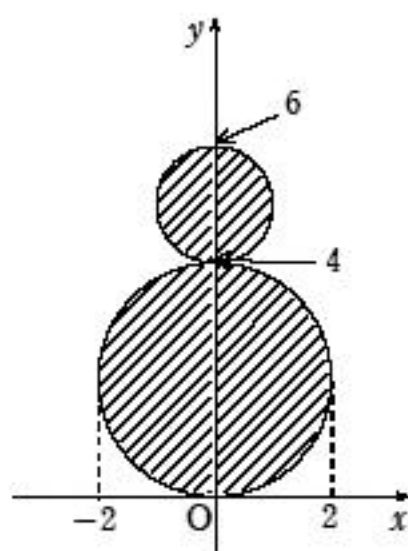
$$\text{または} \begin{cases} x^2 + y^2 - 4y \leq 0 \\ \text{かつ} \\ x^2 + y^2 - 10y + 24 \geq 0 \end{cases}$$

ここで $\textcircled{1} \iff x^2 + (y-2)^2 \geq 2^2$

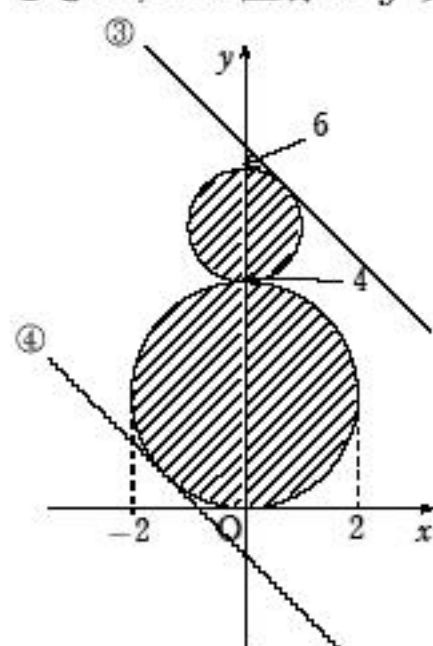
$$\textcircled{2} \iff x^2 + (y-5)^2 \leq 1^2$$

であることに注意して,

求める領域は右図の斜線部, ただし, 境界を含む.



(2) $x + y = k$ とおく. この直線と (1) の領域が共有点をもっているときの, この直線の y 切片 k を考えればよい.



$x + y = k$ が ③ のとき k は最大であり, このとき小さな円の中心 $(0, 5)$ と ③ との距離が 1 なので,

$$\frac{|5 - k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 1$$

$$\iff |5 - k| = \sqrt{2}$$

$$\iff k = 5 \pm \sqrt{2}$$

今, k の最大値を考えているので

$$k = 5 + \sqrt{2}$$

$x + y = k$ が ④ のとき k は最小であり, このとき大きな円の中心 $(0, 2)$ と ④ との距離が 2 なので,

$$\frac{|2 - k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2$$

$$\iff |2 - k| = 2\sqrt{2}$$

$$\iff k = 2 \pm 2\sqrt{2}$$

今, k の最小値を考えているので $k = 2 - 2\sqrt{2}$

以上より

$$\begin{cases} x + y \text{ の最大値は } 5 + \sqrt{2} \\ x + y \text{ の最小値は } 2 - 2\sqrt{2} \end{cases} \dots\dots(\text{答})$$

[Ⅲ]

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \log_4 \frac{b^3}{2} &= \log_4 b^3 - \log_4 2 \\
 &= \frac{\log_2 b^3}{\log_2 4} - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{3\log_2 b}{2} - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{3}{2}t - \frac{1}{2} \qquad \dots\dots(\text{答})
 \end{aligned}$$

(2) $x^2 + ax + 5 - a = 0$ の 2 解が t と $\frac{3}{2}t - \frac{1}{2}$ であるので, 解と係数の関係より

$$\begin{cases} t + \left(\frac{3}{2}t - \frac{1}{2}\right) = -a & \dots\dots ① \\ t\left(\frac{3}{2}t - \frac{1}{2}\right) = 5 - a & \dots\dots ② \end{cases}$$

① を ② に代入して a を消去して

$$\begin{aligned}
 t\left(\frac{3}{2}t - \frac{1}{2}\right) &= 5 + t + \left(\frac{3}{2}t - \frac{1}{2}\right) \\
 \iff t^2 - 2t - 3 &= 0 \\
 \iff (t-3)(t+1) &= 0 \\
 \therefore t &= 3, -1
 \end{aligned}$$

(i) $t = 3$ のとき,

$$\text{① より} \qquad a = -7$$

$$t = \log_2 b \text{ より} \quad b = 8$$

(ii) $t = -1$ のとき,

$$\text{① より} \qquad a = 3$$

$$t = \log_2 b \text{ より} \quad b = \frac{1}{2}$$

よって

$$\begin{cases} a = -7 \\ b = 8 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} a = 3 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \dots\dots(\text{答})$$