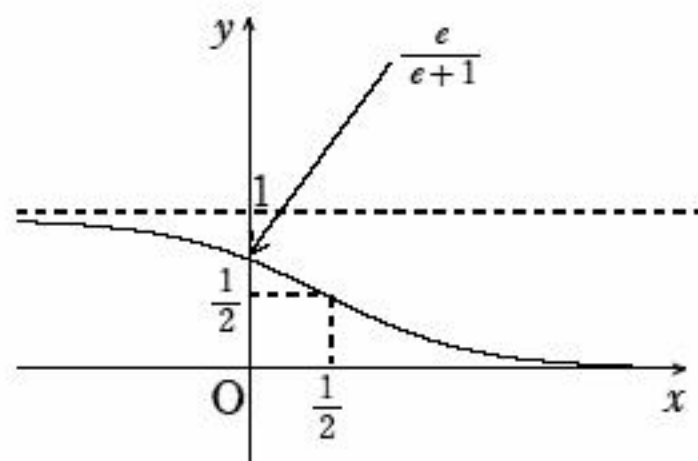


[1]

|     |   |                                         |   |                         |
|-----|---|-----------------------------------------|---|-------------------------|
| (1) | ① | $\frac{-2e^{2x-1}}{(1+e^{2x-1})^2}$     | ② | $4e^{2x-1}(e^{2x-1}-1)$ |
|     | ③ | $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ | ④ | $y=1$                   |

(2)

|          |                    |               |                   |
|----------|--------------------|---------------|-------------------|
| $x$      | ...                | $\frac{1}{2}$ | ...               |
| $f'(x)$  | -                  | -             | -                 |
| $f''(x)$ | -                  | 0             | +                 |
| $f(x)$   | $\curvearrowright$ |               | $\curvearrowleft$ |



(3) (2) の図より, 求める面積  $S$  は

$$S = \int_0^1 \{1 - f(x)\} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^{2x-1}}{1+e^{2x-1}} dx$$

ここで,  $e^{2x-1} = t$  とおくと,  $2e^{2x-1} dx = dt$

$$= \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{t}{1+t} \cdot \frac{dt}{2t}$$

|                                                        |
|--------------------------------------------------------|
| $x: 0 \rightarrow 1$<br>$t: \frac{1}{e} \rightarrow e$ |
|--------------------------------------------------------|

$$= \frac{1}{2} [\log(1+t)]_{\frac{1}{e}}^e$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \log(1+e) - \log\left(1 + \frac{1}{e}\right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{1+e}{1+\frac{1}{e}}$$

$$= \frac{1}{2} \quad \dots(\text{答})$$

[II]

(1)  $z \leq 0$  と仮定する. すると

$$\begin{aligned}xz - y^2 &\leq xz \quad (\because y^2 \geq 0) \\ &\leq 0 \quad (\because x > 0, z \leq 0)\end{aligned}$$

となるが, これは  $xz - y^2 > 0$  に反する.

よって, 背理法より  $z > 0$  となることが示された. ■

$$X + E = \begin{pmatrix} x+1 & y \\ y & z+1 \end{pmatrix}$$

で, これの行列式を考えると

$$\begin{aligned}(x+1)(z+1) - y^2 &= xz - y^2 + x + z + 1 \\ &> x + z + 1 \quad (\because xz - y^2 > 0) \\ &> 0 \quad (\because x > 0, z > 0)\end{aligned}$$

ゆえに, 行列式が 0 でないので,  $X + E$  は逆行列をもつ. ■

(2)  $X^2 - E = (X - E)(X + E)$  なので

$$\begin{aligned}(\text{与等式}) &\iff (X - E)(X + E) - 2A(X + E) \\ &= (X - B)(X + E) \quad \dots(7)\end{aligned}$$

両辺に右から, (1) で存在が示された  $(X + E)^{-1}$  を掛けて

$$\begin{aligned}X - E - 2A &= X - B \\ \therefore B &= 2A + E \quad \dots(\text{答})\end{aligned}$$

(3) (2) の (7) 式の左辺が 0 になることと,  $B = 2A + E$  より

$$(X - 2A - E)(X + E) = O$$

$(X + E)^{-1}$  を両辺に右から掛けて

$$\begin{aligned}X - 2A - E &= O \\ \therefore X &= 2A + E \quad \dots(\text{答})\end{aligned}$$

(4) (3) の結果より

$$A_2 = 2A_1 + E$$

したがって, 一般に  $k$  を自然数として

$$A_{k+1} = 2A_k + E \quad \dots(i)$$

が成り立つ.

$$\text{ここで, } A_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} \text{ とおけば, (i) より}$$

$$\begin{cases} a_{k+1} = 2a_k + 1 \\ b_{k+1} = 2b_k \\ c_{k+1} = 2c_k \\ d_{k+1} = 2d_k + 1 \end{cases}$$

$$\text{が, また } A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{cases} a_1 = d_1 = 3 \\ b_1 = c_1 = -1 \end{cases}$$

が得られる.

$a_k$  については

$$\begin{aligned}a_{k+1} + 1 &= 2(a_k + 1) \\ &= 2^k(a_1 + 1) \\ &= 2^{k+2}\end{aligned}$$

$$\therefore a_k = 2^{k+1} - 1$$

同様に

$$d_k = 2^{k+1} - 1$$

また, 数列  $\{b_n\}, \{c_n\}$  は初項  $-1$ , 公比  $2$  の等比数列なので

$$b_n = c_n = -2^{n-1}$$

$$\text{以上より } A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix} \quad \dots(\text{答})$$

〔Ⅲ〕

|   |                        |   |                                         |   |                       |
|---|------------------------|---|-----------------------------------------|---|-----------------------|
| ① | $\frac{\pi^2}{4a}$     | ② | $a \cos ax$                             | ③ | $\pi ax^2 \cos ax$    |
| ④ | $\sin ax - ax \cos ax$ | ⑤ | $\frac{\pi^3}{4a^2} - \frac{2\pi}{a^2}$ | ⑥ | $\pi - \frac{8}{\pi}$ |

[IV]

|       |    |       |   |       |    |       |    |       |    |
|-------|----|-------|---|-------|----|-------|----|-------|----|
| (1) ① | 17 | (2) ② | 0 | (2) ③ | 26 | (3) ④ | 45 | (4) ⑤ | 60 |
|-------|----|-------|---|-------|----|-------|----|-------|----|