

2009 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(HB)〈シャープペンシルは、HB 0.5 mm以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し、切取線から切り離してください。
4. 試験時間は 90 分です。
5. 問題は 1 ～ 4 ページ目にあり大問 4 問で、余白は計算用紙です。

〔 I 〕 $f(x) = \frac{1}{1 + e^{2x-1}} \quad (-\infty < x < \infty)$

とおく。次の をうめ、設問 (2), (3) に答えよ。

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = \text{①}$$

であり、 $f(x)$ の 2 次導関数 $f''(x)$ は

$$f''(x) = \frac{\text{②}}{(1 + e^{2x-1})^3}$$

である。

曲線 $y = f(x)$ には、変曲点が 1 つある。変曲点の座標は ③ である。

曲線 $y = f(x)$ には、漸近線が 2 本ある。そのうちの 1 つは、 $y = 0$ である。

もう一方の漸近線の方程式は ④ である。

(2) 曲線 $y = f(x)$ の増減表を記述欄にかき、変曲点と漸近線が分かるように、

$y = f(x)$ のグラフの概形を解答用紙の ⑤ にかけ。

(3) ④ で求めた漸近線、 y 軸、直線 $x = 1$ と曲線 $y = f(x)$ によって囲まれてできる領域の面積を求めよ (解答は記述欄にかけ)。

〔Ⅱ〕 2次正方行列 A について、実数を成分とする行列 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$ は

$$X^2 - 2AX - 2A - E = O$$

を満たし、

$$xz - y^2 > 0, \quad x > 0$$

が成り立っているとする。ただし、 E は単位行列、 O は零行列とする。次の問いに答えよ。

(1) $z > 0$ が成り立つことを示し、 $X + E$ が逆行列をもつことを示せ。

(2) 等式

$$X^2 - 2AX - 2A - E = (X - B)(X + E)$$

を満たす行列 B を、 A と E で表せ。

(3) X を A , E を用いて表せ。

(4)
$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

とおき、 $X^2 - 2A_1X - 2A_1 - E = O$ を満たす X を A_2 とおく。つづいて $X^2 - 2A_2X - 2A_2 - E = O$ を満たす X を A_3 とおく。これを繰り返して A_{n-1} まで定めたとき、 $X^2 - 2A_{n-1}X - 2A_{n-1} - E = O$ ($n \geq 2$) を満たす X を A_n とおく。 A_n を求めよ。ただし、解答は n を用いて成分で表せ。

〔Ⅲ〕 次の をうめよ。

a は正の定数とする。 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2a}$ において、 $y = \sin ax$ のグラフと直線 $x = \frac{\pi}{2a}$ と x 軸とで囲まれた部分を、 x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_1 とおく。 V_1 を a を用いて表すと

$$V_1 = \text{①}$$

である。

曲線 $y = \sin ax$ ，直線 $y = 1$ ，および y 軸で囲まれた領域を、 y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_2 とおく。

$$\frac{dy}{dx} = \text{②}$$

である。 V_2 は x の関数 $f(x) = \text{③}$ の定積分として

$$V_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2a}} f(x) dx \quad \dots\dots (*)$$

で与えられる。また、 C を積分定数として

$$\int x \sin ax \, dx = \frac{1}{a^2} \left(\text{④} \right) + C$$

が成り立つので、(*)により、 V_2 は a を用いて

$$V_2 = \text{⑤}$$

と表せる。

①、⑤ により、 $V_1 = V_2$ となる a の値は ⑥ である。

〔IV〕 次の をうめよ。

- (1) 硬貨 A と硬貨 B を、それぞれ続けて 8 回投げる。どちらの硬貨も、1 回の硬貨投げで、表の出る確率は $\frac{1}{2}$ であり、裏の出る確率は $\frac{1}{2}$ であるとする。A の硬貨を 8 回投げて表が出る回数と、B の硬貨を 8 回投げて表が出る回数の差が、7 以上となる確率は $\frac{\text{①}}{2^{15}}$ である。
- (2) α, β, γ を解とする x の 3 次方程式 $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = 0$ は展開して整理すると $x^3 - 13x - 12 = 0$ となる。このとき $\alpha + \beta + \gamma$ の値は ② であり、 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ の値は ③ である。
- (3) $0 < \alpha, \beta < 90^\circ$ とし、 $\tan \alpha = \frac{1}{5}$, $\tan \beta = \frac{2}{3}$ とする。このとき $\alpha + \beta = \text{④}^\circ$ である。
- (4) 空間の 2 つのベクトル $\vec{a} = (3, 2, 1)$ と $\vec{b} = (2, -1, 3)$ のなす角 θ を求めると、 $\theta = \text{⑤}^\circ$ である。ただし、 $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。

(以 上)