

【I】

〔解答〕

(1) ①  $b^2 - 2c = 1$

(2) ②  $\sqrt{10}$  ③  $-\frac{9}{\sqrt{10}}$  ④  $-\frac{1}{\sqrt{10}}$  ⑤  $\frac{3}{2}$  ⑥  $\frac{\pi}{4}$  ⑦  $\frac{5}{4}\pi$

〔解説〕

(1)

$x^2 + bx + c = 0$  の解を  $\alpha, \beta$  とするとき、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -b$$

$$\alpha\beta = c$$

が成り立つ。ここで、 $\alpha = \cos \theta, \beta = \sin \theta$  となる  $0 \leq \theta < 2\pi$  が存在するとき

$$\cos \theta + \sin \theta = -b$$

$$\cos \theta \sin \theta = c$$

となり、さらに

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\Leftrightarrow (\cos \theta + \sin \theta)^2 - 2 \cos \theta \sin \theta = 1$$

$$\Leftrightarrow b^2 - 2c = 1$$

が成り立つ。

(2)

$\alpha = 3 \cos \theta, \beta = \sin \theta$  となる  $0 \leq \theta < 2\pi$  が存在するとき

$$3 \cos \theta + \sin \theta = -b$$

$$3 \cos \theta \sin \theta = c$$

となるから

$$b = -(3 \cos \theta + \sin \theta)$$

$$= -\sqrt{10} \sin(\theta + \phi)$$

と表される。ただし、 $\phi$  は

$$\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{10}}, \sin \phi = \frac{3}{\sqrt{10}}, 0 < \phi < \frac{\pi}{2}$$

を満たす。 $0 \leq \theta < 2\pi$  のとき  $\phi \leq \theta + \phi < 2\pi + \phi$  となるから

$$-\sqrt{10} \leq b \leq \sqrt{10}$$

である。よって、 $b$  のとりうる最大の値は  $\sqrt{10}$  であり、このとき

$$\sin(\theta + \phi) = -1$$

$$\Leftrightarrow \theta + \phi = \frac{3}{2}\pi$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{3}{2}\pi - \phi$$

であるから

$$\alpha = 3 \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \phi\right)$$

$$= -3 \sin \phi$$

$$= -\frac{9}{\sqrt{10}}$$

$$\beta = \sin\left(\frac{3}{2}\pi - \phi\right)$$

$$= -\cos \phi$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

となる。また

$$c = 3 \cos \theta \sin \theta$$

$$= \frac{3}{2} \sin 2\theta$$

となり、 $0 \leq 2\theta < 4\pi$  であるから

$$-\frac{3}{2} \leq c \leq \frac{3}{2}$$

である。よって、 $c$  のとりうる最大の値は  $\frac{3}{2}$  であり、このとき

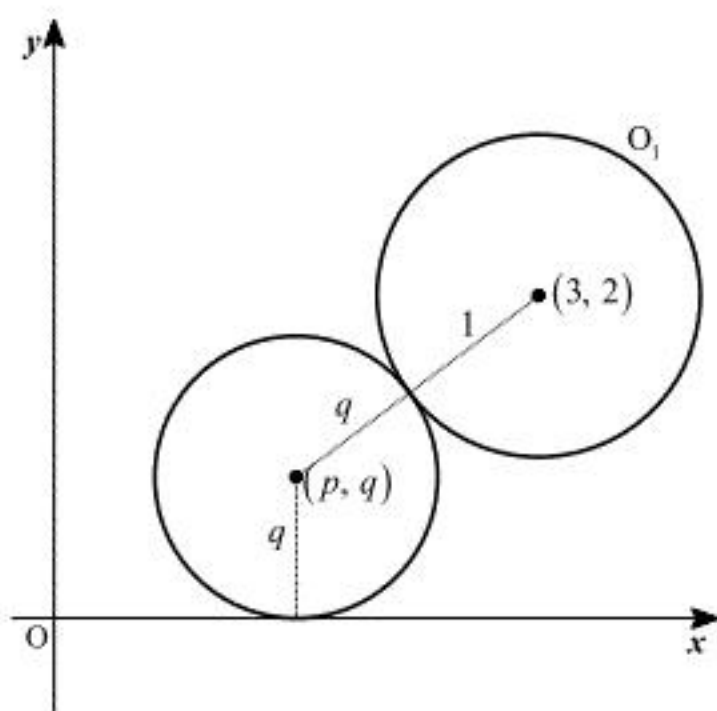
$$2\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$$

となる。

### 〔Ⅲ〕

(1)



円  $O$  の円周上のすべての点が  $x \geq 0, y \geq 0$  を満たす領域にあるとき、この円の中心  $(p, q)$  は  $x > 0, y > 0$  を満たす領域にあるから

$$p > 0, q > 0$$

を満たす。よって、円  $O$  が  $x$  軸に接することから、この円の半径は  $q$  である。さらに、2 円  $O, O_1$  が外接するとき、2 円の中心間の距離と半径の和が等しくなるから

$$\begin{aligned}\sqrt{(p-3)^2 + (q-2)^2} &= q+1 \\ \Leftrightarrow (p-3)^2 + (q-2)^2 &= (q+1)^2 \\ \Leftrightarrow q &= \frac{1}{6}p^2 - p + 2\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad q = \frac{1}{6}p^2 - p + 2$$

(2)

円  $O$  が  $x$  軸と  $y$  軸に接するとき

$$p = q$$

となる。さらに、円  $O_1$  と外接するとき、(1)の結果を用いて

$$q = \frac{1}{6}p^2 - p + 2$$

が成り立つから

$$\begin{aligned}q &= \frac{1}{6}q^2 - q + 2 \\ \Leftrightarrow q^2 - 12q + 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow q &= 6 \pm 2\sqrt{6}\end{aligned}$$

となり、これらは  $q > 0$  を満たす。よって、このときの円  $O$  の半径は  $q$  であるから  $6 \pm 2\sqrt{6}$  となる。

$$(\text{答}) \quad 6 \pm 2\sqrt{6}$$

(3)

(1)の結果より、円  $O$  の中心は放物線  $y = \frac{1}{6}x^2 - x + 2$  上に存在し、 $p$  の増加とともに  $x$  の正方向に動く。また、円  $O$  の中心は  $(p, q)$ 、半径は  $q$  であるから、円  $O$  の円周上のすべての点が  $x \geq 0$  を満たす領域にあるとき、 $p \geq q$  となる。ここで、 $p = q$  を満たす  $p$  の値が(2)の結果より  $6 \pm 2\sqrt{6}$  であることを用いて

$$6 - 2\sqrt{6} \leq p \leq 6 + 2\sqrt{6} \text{ のとき } p \geq q$$

$$p < 6 - 2\sqrt{6}, 6 + 2\sqrt{6} < p \text{ のとき } p < q$$

となるから、以上より、 $p$  のとりうる値の範囲は

$$6 - 2\sqrt{6} \leq p \leq 6 + 2\sqrt{6}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 6 - 2\sqrt{6} \leq p \leq 6 + 2\sqrt{6}$$

(4)

(1)の結果を用いて

$$\begin{aligned}q &= \frac{1}{6}p^2 - p + 2 \\ &= \frac{1}{6}(p-3)^2 + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となり、(3)の結果を用いて  $p$  は  $6 - 2\sqrt{6} \leq p \leq 6 + 2\sqrt{6}$  の範囲を動くから、 $q$  は

$$p = 6 + 2\sqrt{6} \text{ のとき最大値 } 6 + 2\sqrt{6}$$

$$p = 3 \text{ のとき最小値 } \frac{1}{2}$$

をとる。よって、 $q$  のとりうる値の範囲は

$$\frac{1}{2} \leq q \leq 6 + 2\sqrt{6}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} \leq q \leq 6 + 2\sqrt{6}$$