

【1】

(1) $\frac{91}{216}$

(2) $\frac{37}{216}$

(3) $\frac{7}{24}$

(4) $\frac{13}{24}$

(5) $\frac{1}{216}$

【解説】

(1)

3つの数字の積が0になるということは、3つのうち少なくとも1つが0であればよい。
つまり、3つとも0でない場合の余事象にあたるので、積が0になる確率は、

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216}$$

答え $\frac{91}{216}$

(2)

和が0になる数字の組み合わせは、 $(0, 0, 0)$, $(1, 0, -1)$

それぞれの確率の和が求める確率なので、

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \times 3! &= \frac{1}{216} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{37}{216} \end{aligned}$$

答え $\frac{37}{216}$

(3)

積が正になる数字の組み合わせは、 $(1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$

それぞれの確率の和が求める確率なので、

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times {}_3C_1 &= \frac{1}{8} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{7}{24} \end{aligned}$$

答え $\frac{7}{24}$

(4)

和が正になる数字の組み合わせは、 $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, -1)$, $(1, 0, 0)$

それぞれの確率の和が求める確率なので、

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{6} \times {}_3C_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{3} \times {}_3C_1 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times {}_3C_1 &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{24} \\ &= \frac{13}{24} \end{aligned}$$

答え $\frac{13}{24}$

(5)

(1), (3)より、積が0, 正になる確率はそれぞれ、 $\frac{91}{216}$, $\frac{7}{24}$

これらから積が負になる確率を求めると、

$$1 - \left(\frac{91}{216} + \frac{7}{24}\right) = \frac{31}{108}$$

また、積が正のときはその積は1, 同様に負のときは-1である。

よって積の期待値は、

$$1 \times \frac{7}{24} + (-1) \times \frac{31}{108} = \frac{1}{216}$$

答え $\frac{1}{216}$

【Ⅱ】

- (1) ① $\frac{6}{25}$, ② $\frac{9}{25}$
 (2) ③ 6, ④ 9
 (3) ⑤ $\frac{9}{19}$, ⑥ $\frac{19}{25}$

【解説】

(1)
 P は BC を 3:2 に内分する点なので

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}}{3+2} = \frac{2}{5}\overrightarrow{a} + \frac{3}{5}\overrightarrow{b}$$

また Q は AP を 3:2 に内分する点なので

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AP} = \frac{6}{25}\overrightarrow{a} + \frac{9}{25}\overrightarrow{b}$$

答え① $\frac{6}{25}$, ② $\frac{9}{25}$

(2)
 $\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{QC} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{b}$ を用いて, 与えられたベクトル方程式を整理すると,

$$\begin{aligned} 10\overrightarrow{QA} + m\overrightarrow{QB} + n\overrightarrow{QC} = \vec{0} &\Leftrightarrow (10+m+n)\overrightarrow{QA} + m\overrightarrow{a} + n\overrightarrow{b} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow m\overrightarrow{a} + n\overrightarrow{b} = (10+m+n) \times \left(\frac{6}{25}\overrightarrow{a} + \frac{9}{25}\overrightarrow{b} \right) \end{aligned}$$

$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ は一次独立なので,

$$\begin{cases} m - \frac{6}{25}(10+m+n) = 0 & \cdots \text{①} \\ n - \frac{9}{25}(10+m+n) = 0 & \cdots \text{②} \end{cases}$$

①, ②より, $m=6$, $n=9$

答え③ 6, ④ 9

(3)
 $\overrightarrow{QA} = \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{QC} = \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BC}$ を用いて, 与えられたベクトル方程式を整理すると,

$$\begin{aligned} 10\overrightarrow{QA} + 6\overrightarrow{QB} + 9\overrightarrow{QC} = \vec{0} &\Leftrightarrow 25\overrightarrow{QB} + 10\overrightarrow{BA} + 9\overrightarrow{BC} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{BQ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{9}{25}\overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

R は BQ の延長線上なので, $\overrightarrow{BR} = t\overrightarrow{BQ}$ とおくと

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BR} &= t\overrightarrow{BQ} \\ &= \frac{2t}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{9t}{25}\overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

R は AC 上なので, 上式の係数の和は1とならなければならないので,

$$\frac{2t}{5} + \frac{9t}{25} = 1 \Leftrightarrow t = \frac{25}{19}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BR} &= t\overrightarrow{BQ} \\ &= \frac{10}{19}\overrightarrow{BA} + \frac{9}{19}\overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

よって, $AR:RC = 9:10 \Leftrightarrow AC:AR = 1:\frac{9}{19}$

また, $BR:BQ = \frac{25}{19}:1 \Leftrightarrow BR:BQ = 1:\frac{19}{25}$

答え⑤ $\frac{9}{19}$, ⑥ $\frac{19}{25}$

【Ⅲ】

(1)

直線 $y = x - a$ と放物線 $y = x(a - x)$ の交点を求める。

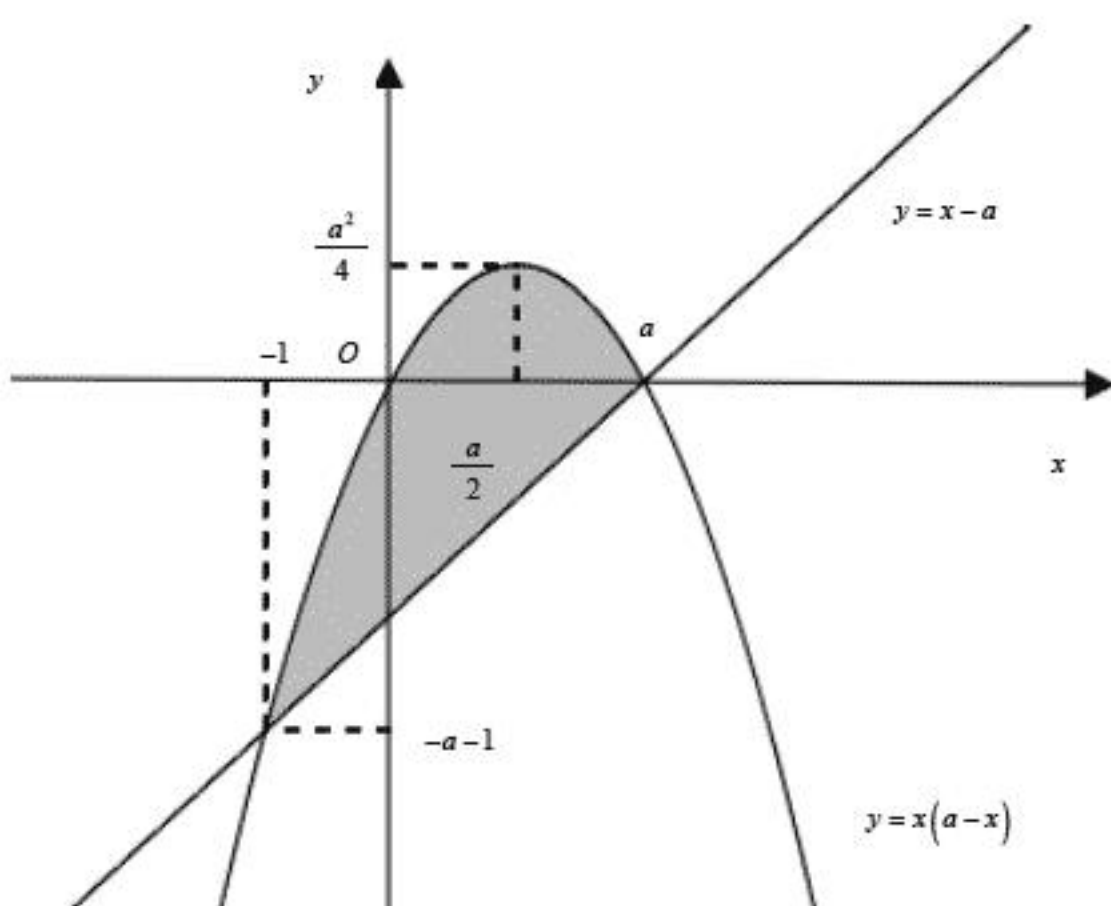
まず、交点の x 座標を求めると、

$$x - a = x(a - x) \Leftrightarrow (1 + x)(a - x) = 0$$

$$\therefore x = a, -1$$

よって求める領域 D は下図の斜線部に示した部分である。

ただし、境界を含む。



(2)

$x + y = k$ …… ① とおくと、直線①が領域 D を通るように k を変化させ、そのときの y 切片 k の最大・最小値を求めればよい。

直線①の傾きは -1 なので、(1)の図より k が最小値をとるのは①が点 $(-1, -a-1)$ を通るとき

である。したがって、 $\min: k = -1 + (-a-1) = -a-2$

また、 k が最大値をとるのは①が点 $(a, 0)$ を通るときか、放物線に接するときのいずれかである。

(i) 点 $(a, 0)$ を通るとき

$$k = a$$

(ii) 放物線に接するとき

$$k - x = x(a - x)$$

$$x^2 - (a+1)x + k = 0$$

の判別式 D が 0 となるから

$$(a+1)^2 - 4k = 0$$

$$\therefore k = \frac{(a+1)^2}{4}$$

(i), (ii)において、 $a > 1$ に注意すれば

$$\frac{(a+1)^2}{4} - a = \frac{(a-1)^2}{4} > 0$$

$$\text{より、} \frac{(a+1)^2}{4} > a \text{ より、} \max: k = \frac{(a+1)^2}{4}$$

$$\text{答え } \min: -a-2, \max: \frac{(a+1)^2}{4}$$