

【I】

(1)

$f(x) = \log(\sin x + 2) \ (0 < x < 2\pi)$ について

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\sin x + 2)'}{\sin x + 2} \\ &= \frac{\cos x}{\sin x + 2} \\ f''(x) &= \frac{(\cos x)'(\sin x + 2) - \cos x(\sin x + 2)'}{(\sin x + 2)^2} \\ &= -\frac{2\sin x + 1}{(\sin x + 2)^2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x + 2}, \quad f''(x) = -\frac{2\sin x + 1}{(\sin x + 2)^2}$$

(2)

(1)の結果を用いて

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x + 2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos x &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \ (\because 0 < x < 2\pi) \end{aligned}$$

となる。さらに

$$0 < x < \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi \text{ のとき } f'(x) > 0$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \text{ のとき } f'(x) < 0$$

より、 $f(x)$ は

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ のとき極大値 } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \log 3$$

$$x = \frac{3}{2}\pi \text{ のとき極小値 } f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$$

をとる。

(答) 極大値 $\log 3$ ，極小値 0

(3)

(1)の結果を用いて

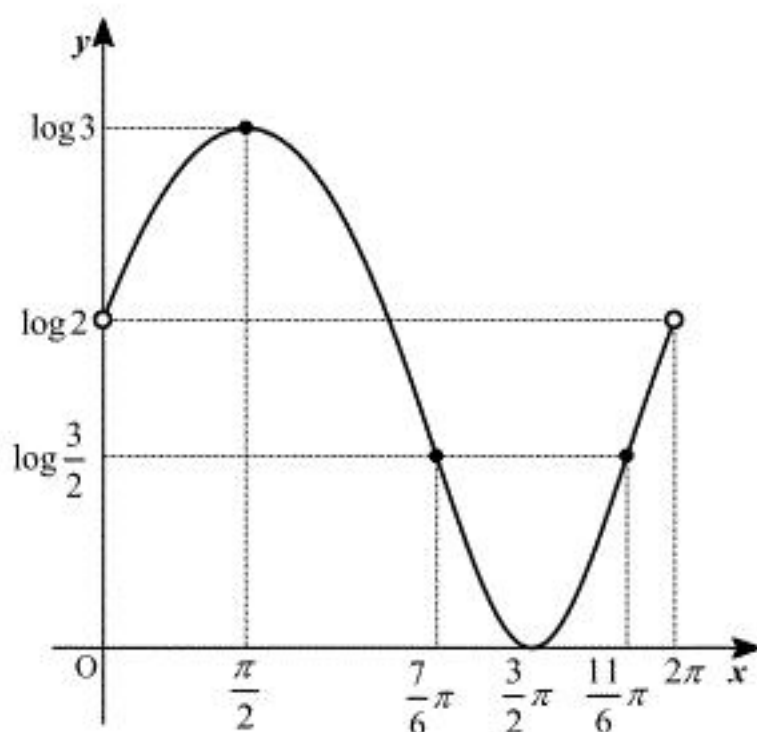
$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{2\sin x + 1}{(\sin x + 2)^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin x &= -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi \ (\because 0 < x < 2\pi) \end{aligned}$$

となる。(2)の結果を用いて関数 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{7}{6}\pi$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	$\frac{11}{6}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	-	-	0	+	+	+	
$f''(x)$		-	-	-	0	+	+	+	0	-	
$f(x)$	$(\log 2)$	$\nearrow$	$\log 3$	$\searrow$	$\log \frac{3}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\log \frac{3}{2}$	$\nearrow$	$(\log 2)$

よって、 $f(x)$ の変曲点は $\left(\frac{7}{6}\pi, \log \frac{3}{2}\right), \left(\frac{11}{6}\pi, \log \frac{3}{2}\right)$ である。 $y = f(x)$ のグラフの概形は下図

のようになる。



(答) 変曲点： $\left(\frac{7}{6}\pi, \log \frac{3}{2}\right), \left(\frac{11}{6}\pi, \log \frac{3}{2}\right)$ ，グラフ：前図

(4)

方程式

$$\begin{aligned} \log(\sin x + 2) - k &= 0 \\ \Leftrightarrow \log(\sin x + 2) &= k \end{aligned}$$

の $0 < x < 2\pi$ における実数解の個数は、2つの関数 $y = \log(\sin x + 2) \ (0 < x < 2\pi)$ ， $y = k$ の共有点の個数にあたる。よって、(3)のグラフを用いて

$k < 0, \log 3 < k$ のとき 0 個

$k = 0, \log 2, \log 3$ のとき 1 個

$0 < k < \log 2, \log 2 < k < \log 3$ のとき 2 個

となる。

(答) 0 個 ($k < 0, \log 3 < k$ のとき)

1 個 ($k = 0, \log 2, \log 3$ のとき)

2 個 ($0 < k < \log 2, \log 2 < k < \log 3$ のとき)

【Ⅱ】

〔解答〕

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 60 ④ $\frac{3t}{3t+2}$ ⑤ $\frac{2+\sqrt{22}}{3}$
 ⑥ $\frac{1}{2}$ ⑦ $\frac{1}{9}$ ⑧ $\frac{1}{9}$ ⑨ $\frac{\sqrt{3}}{9}$

〔解説〕

(1)

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$$

より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}CB &= \frac{2}{3}|\overrightarrow{OA}| \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

である。また

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OC}|^2 &= \left| \overrightarrow{OB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} \right|^2 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{7}}{3} \right)^2 &= |\vec{b}|^2 - \frac{4}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{4}{9}|\vec{a}|^2 \\ \Leftrightarrow \frac{7}{9} &= 1 - \frac{4}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{4}{9} \cdot 1 \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\cos \angle AOB &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となり、 $0^\circ < \angle AOB < 180^\circ$ であるから

$$\angle AOB = 60^\circ$$

となる。つぎに、点 P は線分 OB 上の点であるから $0 \leq s \leq 1$ である実数 s を用いて $\overrightarrow{OP} = s\vec{b}$ と表される。また、点 P は線分 CD 上の点であるから $0 \leq u \leq 1$ である実数 u を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= u\overrightarrow{OD} + (1-u)\overrightarrow{OC} \\ &= ut\vec{a} + (1-u)\left(\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}\right) \\ &= \left(ut + \frac{2}{3}u - \frac{2}{3}\right)\vec{a} + (1-u)\vec{b}\end{aligned}$$

と表される。 $\vec{a}, \vec{b}$ は互いに一次独立であるから

$$\begin{cases} ut + \frac{2}{3}u - \frac{2}{3} = 0 \\ 1 - u = s \end{cases} \Leftrightarrow s = \frac{3t}{3t+2}, u = \frac{2}{3t+2}$$

となり

$$\overrightarrow{OP} = \frac{3t}{3t+2}\vec{b}$$

である。また、 $\triangle OPD$ の重心 G について

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OD}) \\ &= \frac{t}{3}\vec{a} + \frac{t}{3t+2}\vec{b}\end{aligned}$$

と表されるから、点 G が $\triangle OAB$ の内部または周上にあるための条件は

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{t}{3} & \dots\dots ① \\ 0 \leq \frac{t}{3t+2} & \dots\dots ② \\ 0 \leq \frac{t}{3} + \frac{t}{3t+2} \leq 1 & \dots\dots ③ \end{cases}$$

である。 $t > 0$ と①より

$$0 < t$$

となり、 $t > 0$ と②より

$$0 < t \ (\because 3t+2 > 0)$$

となり、 $t > 0$ と②より

$$\begin{aligned}0 &\leq t(3t+2) + 3t \leq 3(3t+2) \ (\because 3t+2 > 0) \\ \Leftrightarrow 0 &\leq 3t^2 + 5t \leq 9t + 6 \\ \Leftrightarrow 3t^2 - 4t - 6 &\leq 0 \ (\because 3t^2 + 5t > 0) \\ \Leftrightarrow 0 < t &\leq \frac{2+\sqrt{22}}{3}\end{aligned}$$

となり、①、②、③より条件を満たす t の範囲は

$$0 < t \leq \frac{2+\sqrt{22}}{3}$$

となる。次に、線分 OD, OP の中点をそれぞれ D', P' とおくと、点 R が $\triangle OPD$ の外心であるとき

$$D'R \perp OD, P'R \perp OP$$

である。ここで

$$\overrightarrow{D'R} = \overrightarrow{OR} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$$

$$\overrightarrow{P'R} = \overrightarrow{OR} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OP}$$

であり、 $\overrightarrow{OD} // \vec{a}, \overrightarrow{OP} // \vec{b}$ であるから、 $\overrightarrow{OR} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$ と $\vec{a}$ が垂直であり、 $\overrightarrow{OR} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OP}$ と $\vec{b}$ が垂直である。

る。 $t = \frac{1}{3}$ のとき

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}\vec{a}, \overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\vec{b}$$

となるから、 p, q を実数として $\overrightarrow{OR} = p\vec{a} + q\vec{b}$ とおくと

$$\begin{aligned}&\begin{cases} \left(\overrightarrow{OR} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} \right) \perp \vec{a} \\ \left(\overrightarrow{OR} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OP} \right) \perp \vec{b} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \left(\overrightarrow{OR} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} \right) \cdot \vec{a} = 0 \\ \left(\overrightarrow{OR} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OP} \right) \cdot \vec{b} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \left\{ \left(p - \frac{1}{6} \right) \vec{a} + q\vec{b} \right\} \cdot \vec{a} = 0 \\ \left\{ p\vec{a} + \left(q - \frac{1}{6} \right) \vec{b} \right\} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} p - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}q = 0 \\ \frac{1}{2}p + q - \frac{1}{6} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &(p, q) = \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{9} \right)\end{aligned}$$

となる。よって

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{9}\vec{a} + \frac{1}{9}\vec{b}$$

であり

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OR}| &= \sqrt{\frac{1}{81}(|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{27}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{9}\end{aligned}$$

である。

〔Ⅲ〕

(1)

[1] $e^{-x} \geq a$ のとき

$x \leq -\log a$ であり, このとき

$$y = e^{-x} - a$$

となる。

[2] $e^{-x} < a$ のとき

$x > -\log a$ であり, このとき

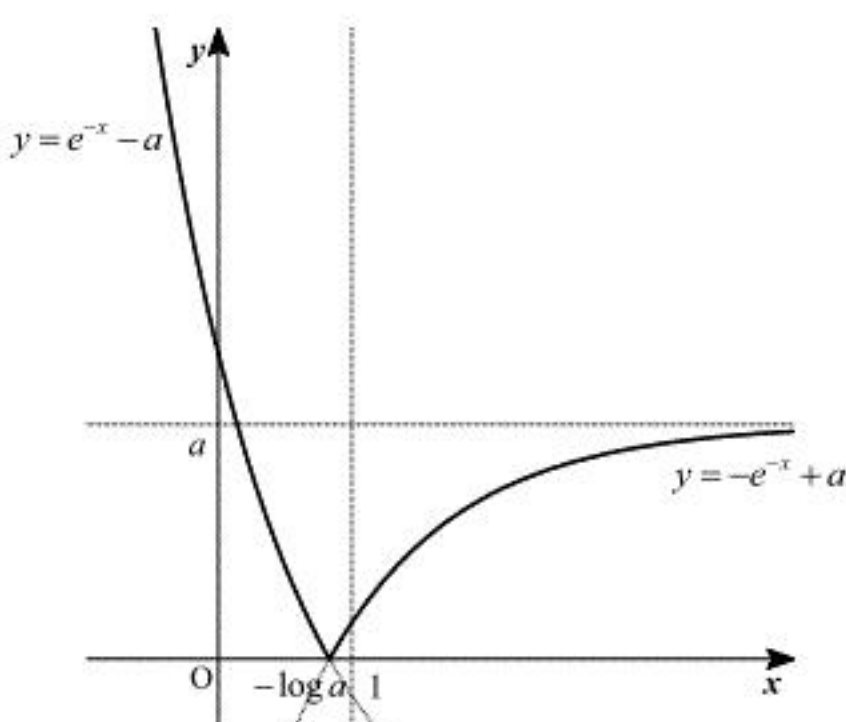
$$y = -e^{-x} + a$$

となる。

また, $(0 <) e^{-1} < a < 1$ より $0 < -\log a < 1$ であり, さらに

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x} + a) = a$$

であるから, 関数 $y = |e^{-x} - a|$ のグラフの概形は下図のようになる。



(答) 前図

(2)

[1] $-\log a \leq 0$ すなわち $1 \leq a$ のとき

$0 \leq x \leq 1$ の範囲において $e^{-x} - a \leq 0$ となるから

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_0^1 \{-(e^{-x} - a)\} dx \\ &= [e^{-x} + ax]_0^1 \\ &= a + e^{-1} - 1 \end{aligned}$$

である。

[2] $0 < -\log a < 1$ すなわち $e^{-1} < a < 1$ のとき

(1)の結果を用いて

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_0^{-\log a} (e^{-x} - a) dx + \int_{-\log a}^1 \{-(e^{-x} - a)\} dx \\ &= [-e^{-x} - ax]_0^{-\log a} + [e^{-x} + ax]_{-\log a}^1 \\ &= 2a \log a - a + e^{-1} + 1 \end{aligned}$$

となる。

[3] $-\log a \geq 1$ すなわち $a \leq e^{-1}$ のとき

$0 \leq x \leq 1$ の範囲において $e^{-x} - a \geq 0$ となるから

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_0^1 (e^{-x} - a) dx \\ &= [-e^{-x} - ax]_0^1 \\ &= -a - e^{-1} + 1 \end{aligned}$$

である。

以上, [1], [2], [3]より

$$f(a) = \begin{cases} -a - e^{-1} + 1 & (a \leq e^{-1}) \\ 2a \log a - a + e^{-1} + 1 & (e^{-1} < a < 1) \\ a + e^{-1} - 1 & (1 \leq a) \end{cases}$$

となる。

$$(答) f(a) = \begin{cases} -a - e^{-1} + 1 & (a \leq e^{-1}) \\ 2a \log a - a + e^{-1} + 1 & (e^{-1} < a < 1) \\ a + e^{-1} - 1 & (1 \leq a) \end{cases}$$

(3)

(2)の結果を用いて, $a \leq e^{-1}$ のとき $f(a)$ は単調減少, $1 \leq a$ のとき $f(a)$ は単調増加する。ま

た, $e^{-1} < a < 1$ のとき

$$f'(a) = 2 \log a + 1$$

であり

$$\begin{aligned} f'(a) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 \log a + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \log a &= -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow a &= e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

となるから, a が $-\infty < a < \infty$ であるとき, $f(a)$ の増減表は以下のようになる。

a	$\cdots$	e^{-1}	$\cdots$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(a)$	-		-	0	+		+
$f(a)$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

よって, $f(a)$ は

$$a = e^{-\frac{1}{2}} \text{ のとき最小値 } f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = 1 + e^{-1} - 2e^{-\frac{1}{2}}$$

をとる。

$$(答) 1 + e^{-1} - 2e^{-\frac{1}{2}}$$

【Ⅳ】

【解答】

- ① -1 ② $-\frac{1}{5}$ ③ $-1, 3, 5$ ④ 10 ⑤ $\sqrt{2}$
- ⑥ 216 ⑦ $\frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi, \frac{\pi}{2}$

【解説】

- (1)
- $x^2-3x+5=0$ の 2 つの解を α, β とするとき、解と係数の関係より
- $$\alpha+\beta=3, \alpha\beta=5$$
- が成り立つ。よって
- $$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \\ &= -1\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha} &= \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{5}\end{aligned}$$
- である。
- (2)
- 点 $(1, 2), (2, 4), (3, 1)$ をそれぞれ B, C, D とおき、線分 BC, CD, DB の中点をそれぞれ P, Q, R とすると
- $$P\left(\frac{3}{2}, 3\right), Q\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right), R\left(2, \frac{3}{2}\right)$$
- となる。また、点 A の y 座標を a とおく。
- [1] A, B が対角となるとき
- 平行四辺形の 2 つの対角線はそれぞれの中点で交わるから、AB の中点と Q が一致する。よって、 y 座標を比較して
- $$\begin{aligned}\frac{a+2}{2} &= \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow a &= 3\end{aligned}$$
- となる。
- [2] A, C が対角となるとき
- 平行四辺形の 2 つの対角線はそれぞれの中点で交わるから、AC の中点と R が一致する。よって、 y 座標を比較して
- $$\begin{aligned}\frac{a+4}{2} &= \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow a &= -1\end{aligned}$$
- となる。
- [3] A, D が対角となるとき
- 平行四辺形の 2 つの対角線はそれぞれの中点で交わるから、AD の中点と P が一致する。よって、 y 座標を比較して
- $$\begin{aligned}\frac{a+1}{2} &= 3 \\ \Leftrightarrow a &= 5\end{aligned}$$
- となる。
- 以上、[1], [2], [3] より、A の y 座標は $-1, 3, 5$ である。
- (3)
- $(x+y+1)^n$ を展開したときの xy の項の係数は
- $$\frac{n!}{1!!(n-2)!} \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1^{n-2} = n(n-1)$$
- となるから、これが 90 であるとき
- $$\begin{aligned}n(n-1) &= 90 \\ \Leftrightarrow n^2-n-90 &= 0 \\ \Leftrightarrow (n-10)(n+9) &= 0 \\ \Leftrightarrow n &= -9, 10\end{aligned}$$
- となるが、 n は自然数なので
- $$n=10$$
- である。
- (4)
- [1] $-1 < x < 1$ のとき
- $$\begin{aligned}f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{x^{n+2}+x^n+1} \\ &= \frac{0}{0+0+1} \\ &= 0\end{aligned}$$
- となる。
- [2] $x=1$ のとき
- $$\begin{aligned}f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+1+1} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$
- となる。
- [3] $1 < x$ のとき
- $$\begin{aligned}f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2+1+\frac{1}{x^n}} \\ &= \frac{1}{x^2+1+0} \\ &= \frac{1}{x^2+1}\end{aligned}$$
- となる。
- 以上、[1], [2], [3] より
- $$f(x) = \begin{cases} 0 & (-1 < x < 1) \\ \frac{1}{3} & (x=1) \\ \frac{1}{x^2+1} & (1 < x) \end{cases}$$
- である。ここで
- $$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$
- となるから、 $f(x)$ は $x=1$ で連続にならず、また、他の x の値では連続である。よって、 $\alpha=1$ である。 $x \neq 1$ かつ $f(x)=f(1)$ となる x の値は $1 < x$ に存在し
- $$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+1} &= \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow x^2+1 &= 3 \\ \Leftrightarrow (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt{2} \quad (\because x > 1)\end{aligned}$$
- となる。
- (5)
- $\alpha=1+\sqrt{3}i$ のとき
- $$\begin{aligned}(\alpha-1)^2 &= (\sqrt{3}i)^2 \\ \Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha+1 &= -3 \\ \Leftrightarrow \alpha^2 &= 2\alpha-4\end{aligned}$$
- となる。このとき
- $$\begin{aligned}(\alpha+2)^6 &= (\alpha^2+4\alpha+4)^3 \\ &= \{(2\alpha-4)+4\alpha+4\}^3 \\ &= (6\alpha)^3 \\ &= 216\alpha^3\end{aligned}$$
- となるから
- $$\begin{aligned}\frac{(\alpha+2)^6}{\alpha^3} &= \frac{216\alpha^3}{\alpha^3} \\ &= 216\end{aligned}$$
- である。
- (6)
- $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ であるから
- $$\begin{aligned}\sin 3x + \sin x &= \cos x \\ \Leftrightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x + \sin x &= \cos x \\ \Leftrightarrow 4\sin x(1-\sin^2 x) &= \cos x \\ \Leftrightarrow 4\sin x \cos^2 x &= \cos x \\ \Leftrightarrow \cos x(4\sin x \cos x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos x(2\sin 2x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos x = 0 &\text{ または } \sin 2x = \frac{1}{2}\end{aligned}$$
- となる。 $0 < x \leq \pi$ とすると、 $0 < 2x \leq 2\pi$ であるから
- $$\begin{aligned}\cos x &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$
- および
- $$\begin{aligned}\sin 2x &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 2x &= \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi\end{aligned}$$
- となる。よって、方程式 $\sin 3x + \sin x = \cos x$ の解 x は
- $$x = \frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi, \frac{\pi}{2}$$
- である。