

2010 年度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(HB)〈シャープペンシルは、HB 0.5 mm以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し、切取線から切り離してください。
4. 試験時間は 100 分です。
5. 問題は 1 ～ 4 ページ目にあり大問 4 問で、余白は計算用紙です。
6. 解答用紙は両面になっています。

〔 I 〕 関数 $f(x) = \log(\sin x + 2)$ ($0 < x < 2\pi$) について、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の第 1 次導関数 $f'(x)$ と第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ。
- (2) $f(x)$ の極値を求めよ。
- (3) $f(x)$ の変曲点を求め、 $y = f(x)$ のグラフの概形を解答欄の座標平面上にかけ。
- (4) k を実数の定数とすると、 $0 < x < 2\pi$ における $\log(\sin x + 2) - k = 0$ の解の個数を調べよ。

〔Ⅱ〕 平面上の四角形 OABC について、 $OA = OB = 1$ 、 $OC = \frac{\sqrt{7}}{3}$ および

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} - \frac{2}{3} \overrightarrow{OA}$ が成り立っているとする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおく。

次の をうめよ。

$CB =$ ① $, \vec{a} \cdot \vec{b} =$ ② であり、 $\angle AOB$ は ③ 度である。

$t > 0$ とし、直線 OA 上に点 D を $\overrightarrow{OD} = t \overrightarrow{OA}$ となるようにとる。このとき、
線分 OB と線分 CD との交点を P とおくと、 t を用いて $\overrightarrow{OP} =$ ④ $\vec{b}$ と書ける。

$\triangle OPD$ の重心 G が $\triangle OAB$ の内部または周上にあるような t の範囲は

$0 < t \leq$ ⑤ である。また、 $\triangle OPD$ の外心を R とおくと、

$\overrightarrow{OR} -$ ⑥ $\overrightarrow{OD}$ と $\vec{a}$ が垂直であり、 $\overrightarrow{OR} -$ ⑥ $\overrightarrow{OP}$ と $\vec{b}$ も垂直であることから、 $t = \frac{1}{3}$ のとき、 $\overrightarrow{OR} =$ ⑦ $\vec{a} +$ ⑧ $\vec{b}$ であり、

$|\overrightarrow{OR}| =$ ⑨ である。

〔Ⅲ〕 x の関数 $y = |e^{-x} - a|$ に対して、次の問いに答えよ。ここで a は $-\infty < a < \infty$ の範囲の定数とする。

(1) $e^{-1} < a < 1$ であるとき、 x の関数 $y = |e^{-x} - a|$ のグラフの概形を解答欄の座標平面上にかけ。

(2) $f(a) = \int_0^1 |e^{-x} - a| dx$ とおく。 $-\infty < a < \infty$ であるとき、 $f(a)$ を a を用いて表せ。

(3) a が $-\infty < a < \infty$ であるとき、 $f(a)$ の最小値を求めよ。

〔IV〕 次の をうめよ。

(1) $x^2 - 3x + 5 = 0$ の 2 つの解を α, β とする。このとき、 $\alpha^2 + \beta^2 =$ ①

であり、さらに $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} =$ ② である。

(2) xy 平面上の 3 点 $(1, 2), (2, 4), (3, 1)$ にあと 1 点 A を加えることにより、それらが平行四辺形の 4 つの頂点になるとする。このとき、 A の y 座標をすべて求めると ③ である。

(3) n は自然数とする。 $(x + y + 1)^n$ を展開したとき、 xy の項の係数は 90 であった。このときの n の値は ④ である。

(4) $-1 < x$ において、関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{x^{n+2} + x^n + 1}$$

で定義されている。 $f(x)$ を求めると、ある値 α で $f(x)$ が連続にならないことがわかる。このとき $f(\alpha)$ と等しい値をとるもうひとつの x は ⑤ である。

(5) $i = \sqrt{-1}$ とする。複素数 $\alpha = 1 + \sqrt{3}i$ に対して、 $\frac{(\alpha + 2)^6}{\alpha^3}$ の値は ⑥ である。

(6) $0 < x \leq \pi$ とする。方程式

$$\sin 3x + \sin x = \cos x$$

の解 x をすべて求めると ⑦ である。

(以 上)