

〔I〕

〔解答〕

$$(1) \quad \textcircled{1} \quad 2 \qquad \textcircled{2} \quad 6$$

$$(2) \quad \textcircled{3} \quad \frac{7}{12}\pi$$

$$(3) \quad \textcircled{4} \quad 16 \qquad \textcircled{5} \quad -16$$

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{12} &= \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

である。

(2)

$\cos \theta = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ であるとき、 $0 < \theta < \pi$ において $\sin \theta > 0$ であるから

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \\ &= \cos \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

となる。さらに、 $\cos \theta < 0$ より $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ であるから

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \\ &= \frac{7}{12}\pi \end{aligned}$$

となる。

(3)

$x = \cos \frac{\pi}{12}$ とおくと

$$x^2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

$$x^4 = \frac{7 + 4\sqrt{3}}{16}$$

となる。これが $ax^4 + bx^2 + 1 = 0$ を満たすとき

$$\begin{aligned} a \cdot \frac{7 + 4\sqrt{3}}{16} + b \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{4} + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{7}{16}a + \frac{1}{2}b + 1 \right) + \sqrt{3} \left(\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b \right) &= 0 \end{aligned}$$

となるが、 a, b はともに整数であり、 $\frac{7}{16}a + \frac{1}{2}b + 1, \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b$ は有理数、 $\sqrt{3}$ は無理数であるから

$$\begin{cases} \frac{7}{16}a + \frac{1}{2}b + 1 = 0 \\ \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b = 0 \end{cases}$$

が成り立つ必要がある。これを解くと

$$a = 16, b = -16$$

となるが、これは a, b が整数であるという条件を満たす。

〔Ⅱ〕

(1)

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$ について

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 6x - 9 \\ &= 3(x-1)(x+3) \end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

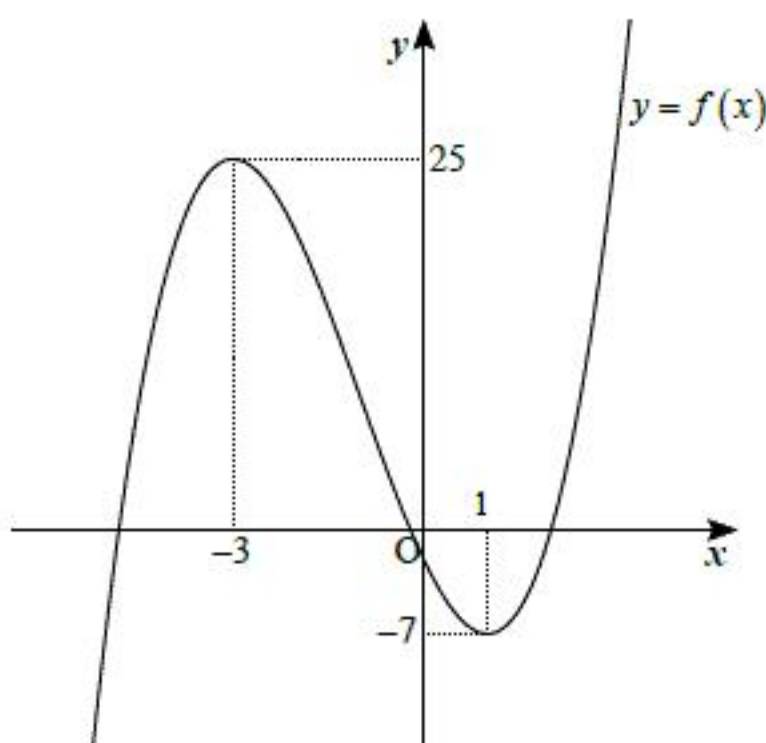
x	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	25	↘	-7	↗

よって、 $f(x)$ は

$x = -3$ のときに極大値 25

$x = 1$ のときに極小値 -7

をとる。また、関数 $y = f(x)$ のグラフは下図のようになる。



(答) 極大値：25 ($x = -3$ のとき), 極小値：-7 ($x = 1$ のとき), グラフ：前図

(2)

関数 $y = f(x)$ のグラフ上の点 $(a, f(a))$ における接線と、点 $(a+2, f(a+2))$ における接線が平行であるとき

$$\begin{aligned} f'(a) &= f'(a+2) \\ \Leftrightarrow 3a^2 + 6a - 9 &= 3(a+2)^2 + 6(a+2) - 9 \\ \Leftrightarrow 12a + 24 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= -2 \end{aligned}$$

となる。また、このときの点 $(-2, f(-2))$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(-2)(x+2) + f(-2) \\ \Leftrightarrow y &= -9(x+2) + 20 \\ \Leftrightarrow y &= -9x + 2 \end{aligned}$$

である。

(答) $a = -2$, 接線の方程式： $y = -9x + 2$