

〔 I 〕

〔解答〕

(1)

$$\textcircled{1} -1 < x < 3 \quad \textcircled{2} (x+1)^2(3-x)$$

(2)

$$\textcircled{3} 2 \quad \textcircled{4} 1 \quad \textcircled{5} \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$$

〔解説〕

(1)

$f(x) = \log_3(x+1) + \log_9(3-x)$ であるから、真数条件によって $f(x)$ の定義域は、

$$x+1 > 0 \text{ かつ } 3-x > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$$

である。また、底の変換公式より $\log_3(x+1) = \frac{\log_9(x+1)}{\log_9 3} = 2\log_9(x+1)$ であるから、

$$f(x) = 2\log_9(x+1) + \log_9(-x+3) = \log_9(x+1)^2(-x+3)$$

となる。したがって、 $g(x) = (x+1)^2(-x+3)$ である。

(2)

整数 n に対し、 $f(n)$ の値も整数になるような n を求める。(1)より、 $f(n)$ の定義域は $-1 < n < 3$ であるから、 n の候補は $0, 1, 2$ である。

$n=0$ のとき、 $g(0)=3$ であるから $f(0)$ は整数ではない。

$n=1$ のとき、 $g(1)=8$ であるから $f(1)$ は整数ではない。

$n=2$ のとき、 $g(2)=9$ であるから $f(2)=1$ となる。

したがって $n=2$ であり、このとき $f(n)=1$ である。また、 x を整数と限らなければ

$$f(x)=1$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2(-x+3)=9$$

$$\Leftrightarrow x^3-x^2-5x+6=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+x-3)=0$$

であるから、 x に関する 2 次方程式 $x^2+x-3=0$ を解くことで、

$$x = \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \quad (\because -1 < x < 3)$$

と求まる。

〔Ⅱ〕

(1)

円の図形的性質より、点Aを中心とする円C上の点Pに対して、直線APと点Pにおける円Cの接線lは直交する。よって、点Pの座標は、点A(a, b)を通り直線y=2xに垂直な直線と、直線y=2xの交点として求められるから

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}(x-a)+b \\ y = 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{a+2b}{5}, \frac{2a+4b}{5} \right)$$

となる。

$$(答) \ P\left(\frac{a+2b}{5}, \frac{2a+4b}{5}\right)$$

(2)

点Aを中心とする半径r(>0)の円Cがある直線lに接するための条件は、円Cの半径rと点Aから直線lに下ろした垂線の長さが一致することである。よって、円Cが直線y=2xと接するための条件は、点と直線の距離公式より

$$r = \frac{|2a-b|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$

となる。同様に、円Cが直線y=xと接するための条件は

$$r = \frac{|a-b|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$$

となるから、a, bは関係式

$$\frac{|2a-b|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|a-b|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$$

$$\Leftrightarrow 5(a-b)^2 = 2(2a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 + 2ab - 3b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{1+\sqrt{10}}{3}a \left(\because a > 0, b > 0, \frac{1-\sqrt{10}}{3} < 0 < \frac{1+\sqrt{10}}{3} \right)$$

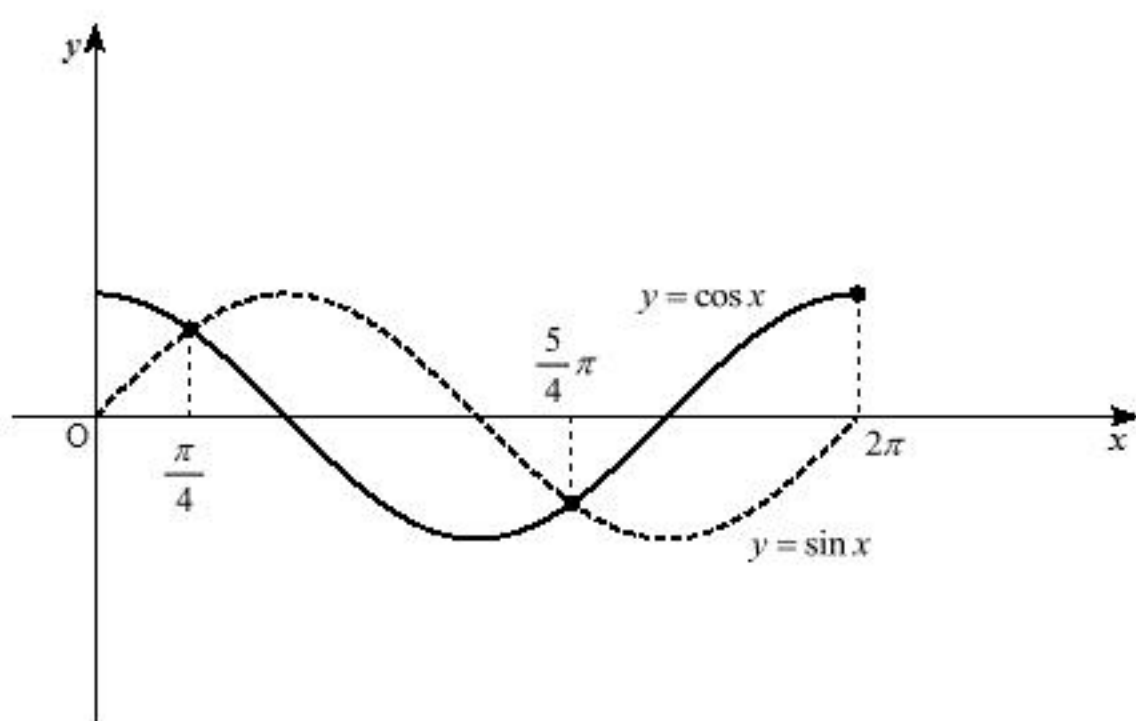
を満たさなければならない。

$$(答) \ b = \frac{1+\sqrt{10}}{3}a$$

【Ⅲ】

(1)

$y = \cos x$, $y = \sin x$ のグラフを $0 \leq x < 2\pi$ の範囲で xy 平面上に図示するとそれぞれ以下の実線部、点線部のようになる。



上図より、不等式

$$\sin x \leq \cos x \quad (0 \leq x < 2\pi)$$

の解は

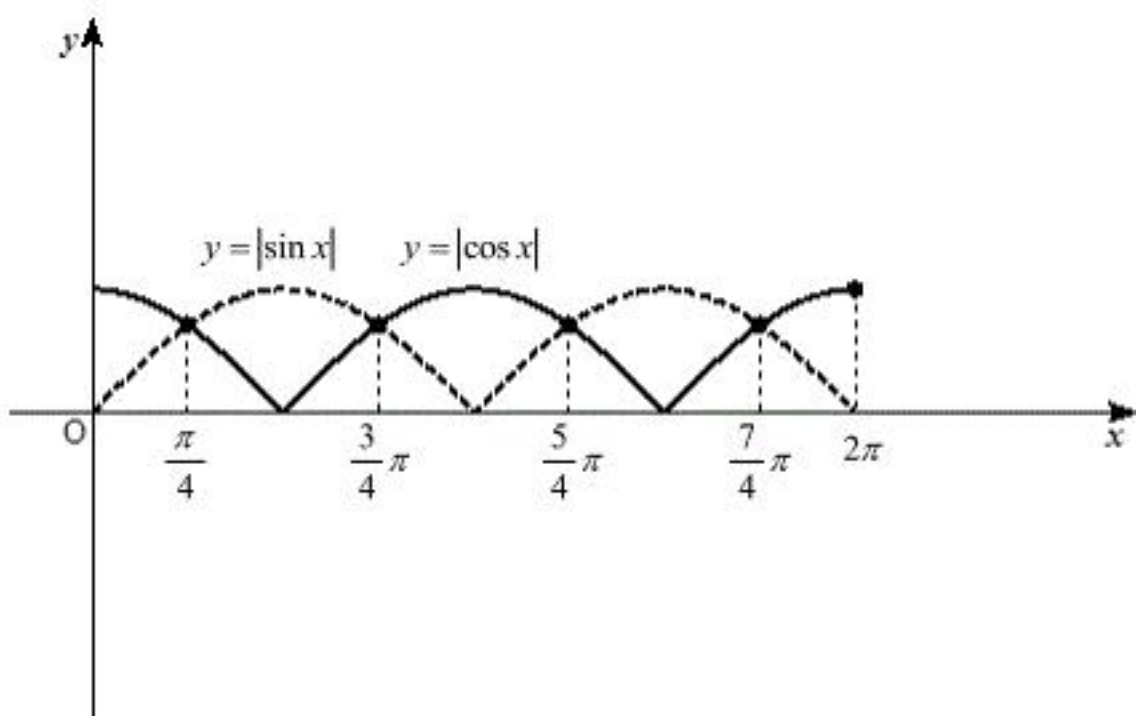
$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \quad \frac{5}{4}\pi \leq x < 2\pi$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \quad \frac{5}{4}\pi \leq x < 2\pi$$

(2)

$y = |\cos x|$, $y = |\sin x|$ のグラフを $0 \leq x < 2\pi$ の範囲で xy 平面上に図示するとそれぞれ以下の実線部、点線部のようになる。



上図より、不等式

$$|\sin x| \leq |\cos x| \quad (0 \leq x < 2\pi)$$

の解は

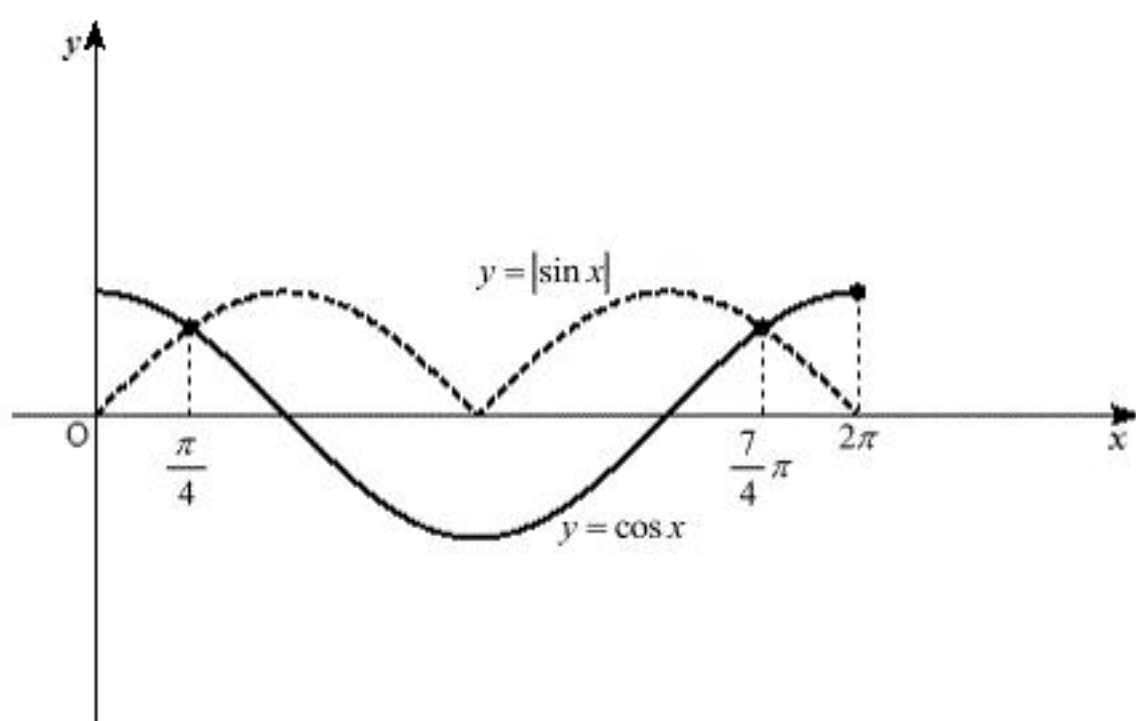
$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \quad \frac{3}{4}\pi \leq x \leq \frac{5}{4}\pi, \quad \frac{7}{4}\pi \leq x < 2\pi$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \quad \frac{3}{4}\pi \leq x \leq \frac{5}{4}\pi, \quad \frac{7}{4}\pi \leq x < 2\pi$$

(3)

$y = \cos x$, $y = |\sin x|$ のグラフを $0 \leq x < 2\pi$ の範囲で xy 平面上に図示するとそれぞれ以下の実線部、点線部のようになる。



上図より、不等式

$$|\sin x| \leq \cos x \quad (0 \leq x < 2\pi)$$

の解は、

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \quad \frac{7}{4}\pi \leq x < 2\pi$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \quad \frac{7}{4}\pi \leq x < 2\pi$$