

# 【I】

(1)

曲線  $C_1: y = ax^2$ ,  $C_2: x = y^2$  の共有点の  $x$  座標は

$$\begin{aligned} x &= (ax^2)^2 \\ \Leftrightarrow x &= a^2 x^4 \\ \Leftrightarrow x(a^2 x^3 - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0, a^{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

であり,  $a > 0$  より  $a^{-\frac{2}{3}} \neq 0$  であるから, 曲線  $C_1$  と  $C_2$  の交点のうち, 原点と異なる点の  $x$  座標

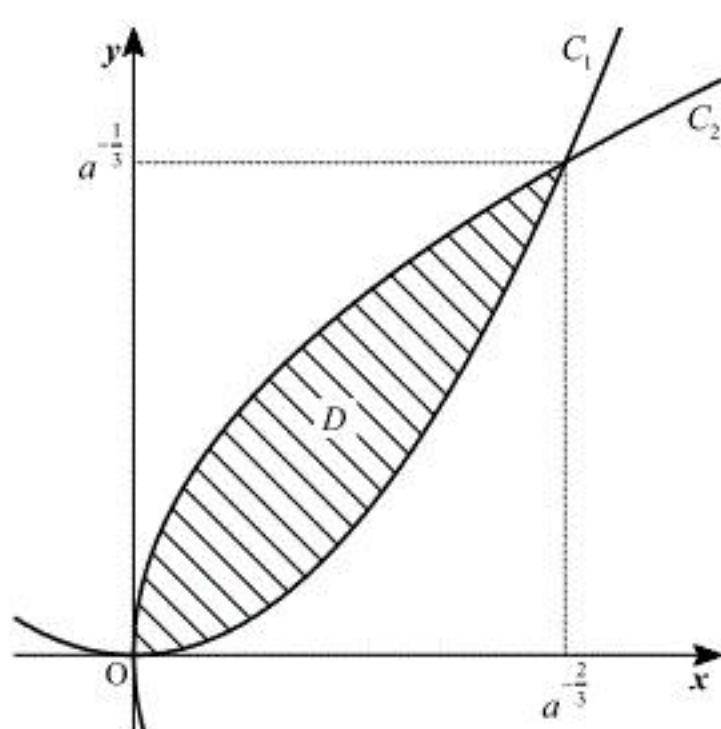
は  $a^{-\frac{2}{3}}$  であり,  $y$  座標は

$$a \cdot \left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^2 = a^{-\frac{1}{3}}$$

となる。よって, 求める座標は  $\left(a^{-\frac{2}{3}}, a^{-\frac{1}{3}}\right)$  である。

$$(\text{答}) \left(a^{-\frac{2}{3}}, a^{-\frac{1}{3}}\right)$$

(2)



$D$  は上図の斜線部である。  $D$  を  $x$  軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積  $V_1$  は

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^{a^{-\frac{2}{3}}} x dx - \pi \int_0^{a^{-\frac{2}{3}}} (ax^2)^2 dx \\ &= \pi \int_0^{a^{-\frac{2}{3}}} (x - a^2 x^4) dx \\ &= \pi \left[ \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{5} a^2 x^5 \right]_0^{a^{-\frac{2}{3}}} \\ &= \pi \left( \frac{1}{2} a^{-\frac{4}{3}} - \frac{1}{5} a^{-\frac{4}{3}} \right) \\ &= \frac{3}{10} \pi a^{-\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

となる。また,  $D$  を  $y$  軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積  $V_2$  は

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_0^{a^{-\frac{1}{3}}} \frac{y}{a} dy - \pi \int_0^{a^{-\frac{1}{3}}} (y^2)^2 dy \\ &= \pi \int_0^{a^{-\frac{1}{3}}} \left( \frac{y}{a} - y^4 \right) dy \\ &= \pi \left[ \frac{1}{2a} y^2 - \frac{1}{5} y^5 \right]_0^{a^{-\frac{1}{3}}} \\ &= \pi \left( \frac{1}{2} a^{-\frac{5}{3}} - \frac{1}{5} a^{-\frac{5}{3}} \right) \\ &= \frac{3}{10} \pi a^{-\frac{5}{3}} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad V_1 = \frac{3}{10} \pi a^{-\frac{4}{3}}, V_2 = \frac{3}{10} \pi a^{-\frac{5}{3}}$$

(3)

$f(a) = V_1 - V_2$  とおくと

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{3}{10} \pi a^{-\frac{4}{3}} - \frac{3}{10} \pi a^{-\frac{5}{3}} \\ &= \frac{3}{10} \pi a^{-\frac{5}{3}} \left( a^{\frac{1}{3}} - 1 \right) \end{aligned}$$

となるから,  $V_1 \geq V_2$  となるとき

$$\begin{aligned} V_1 &\geq V_2 \\ \Leftrightarrow f(a) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3}{10} \pi a^{-\frac{5}{3}} \left( a^{\frac{1}{3}} - 1 \right) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a^{\frac{1}{3}} - 1 &\geq 0 \quad (\because a > 0) \\ \Leftrightarrow a &\geq 1 \end{aligned}$$

である。また

$$\begin{aligned} f'(a) &= -\frac{2}{5} \pi a^{-\frac{7}{3}} + \frac{1}{2} \pi a^{-\frac{8}{3}} \\ &= -\frac{2}{5} \pi a^{-\frac{8}{3}} \left( a^{\frac{1}{3}} - \frac{5}{4} \right) \end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{3}} - \frac{5}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{125}{64} \end{aligned}$$

であるから,  $a > 0$  における  $f(a)$  の増減表は以下のようになる。

|         |             |            |                  |            |
|---------|-------------|------------|------------------|------------|
| $a$     | 0           | ...        | $\frac{125}{64}$ | ...        |
| $f'(a)$ | $\diagdown$ | +          | 0                | -          |
| $f(a)$  | $\diagdown$ | $\nearrow$ |                  | $\searrow$ |

以上より,  $V_1 - V_2 (= f(a))$  を最大にする  $a$  の値は  $a = \frac{125}{64}$  である。

$$(\text{答}) \quad V_1 \geq V_2 \text{ となるような } a \text{ の値の範囲: } a \geq 1, V_1 - V_2 \text{ を最大にする } a \text{ の値: } a = \frac{125}{64}$$

## 【II】

【解答】

$$\begin{array}{llll} \textcircled{1} & -\frac{3}{2} & \textcircled{2} & \frac{1}{2} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \textcircled{3} & -1 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \textcircled{4} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \textcircled{5} & -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\textcircled{6} \quad 2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} \quad \textcircled{7} \quad \frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} \quad \textcircled{8} \quad \frac{14}{3}$$

【解説】

$AR=QA$  を満たすとき

$$AR=QA$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{5a+6}{2} & \frac{-4a-5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ ab & b \end{pmatrix}$$

となるから

$$\begin{cases} \frac{5a+6}{2} = ab & \dots\dots \textcircled{1} \\ \frac{-4a-5}{2} = b & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

である。①, ②より

$$\begin{aligned} \frac{5a+6}{2} &= a \cdot \frac{-4a-5}{2} \\ \Leftrightarrow 4a^2+10a+6 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(2a+3)(a+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= -\frac{3}{2}, -1 \end{aligned}$$

となる。

[1]  $a=-\frac{3}{2}$  のとき

$$\begin{aligned} \det A &= 3+2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから、 $A$  は逆行列をもたない。また、このとき②より

$$\begin{aligned} b &= \frac{-4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 5}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

[2]  $a=-1$  のとき

$$\begin{aligned} \det A &= 3+2 \cdot (-1) \\ &= 1 \neq 0 \end{aligned}$$

であるから、 $A$  は逆行列をもち

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

となる。また、このとき②より

$$\begin{aligned} b &= \frac{-4 \cdot (-1) - 5}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

さらに、 $a=-1$  のとき、 $A$  は逆行列  $A^{-1}$  をもつから、 $AR=QA$  の両辺に左から  $A^{-1}$  をかけて

$$R=A^{-1}QA$$

となる。よって、任意の自然数  $k$  に対して

$$\begin{aligned} R^k &= (A^{-1}QA)(A^{-1}QA) \cdots (A^{-1}QA) \\ &= A^{-1}Q^kA \end{aligned}$$

が成り立ち

$$\begin{aligned} S_n &= A+AR+AR^2+\cdots+AR^{n-1} \\ &= A+A(A^{-1}QA)+A(A^{-1}Q^2A)+\cdots+A(A^{-1}Q^{n-1}A) \\ &= A+QA+Q^2A+\cdots+Q^{n-1}A \\ &= (E+Q+Q^2+\cdots+Q^{n-1})A \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} S_n &= \begin{pmatrix} x_n & 0 \\ 0 & y_n \end{pmatrix} \\ &= E+Q+Q^2+\cdots+Q^{n-1} \end{aligned}$$

である。ここで、任意の自然数  $k$  に対して

$$Q^k = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^k \end{pmatrix}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} x_n &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} \\ y_n &= 1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

となる。さらに、このとき

$$A+AR+AR^2+\cdots+AR^{n-1}=S_n$$

の両辺に左から  $A^{-1}$  をかけると

$$\begin{aligned} E+R+R^2+\cdots+R^{n-1} &= A^{-1}S_n \\ &= A^{-1} \begin{pmatrix} x_n & 0 \\ 0 & y_n \end{pmatrix} A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n & 0 \\ 0 & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3x_n-2y_n & -2x_n+2y_n \\ 3x_n-3y_n & -2x_n+3y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって

$$p_n = 3x_n - 2y_n$$

であり

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} p_n &= 3\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) - 2\left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n\right) \\ &= 3 \cdot 2 - 2 \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{14}{3} \end{aligned}$$

となる。

### 〔Ⅲ〕

(1)

$n \geq 2$  のもとで

$$\begin{aligned}(n+3)a_{n+1} - (2n+4)a_n + (n+1)a_{n-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow (n+3)(a_{n+1} - a_n) &= (n+1)(a_n - a_{n-1})\end{aligned}$$

であるから,  $b_n = a_{n+1} - a_n$  とおくと

$$\begin{aligned}(n+3)b_n &= (n+1)b_{n-1} \\ \Leftrightarrow b_n &= \frac{n+1}{n+3}b_{n-1}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad b_n = \frac{n+1}{n+3}b_{n-1}$$

(2)

(1)の結果を用いて,  $n \geq 2$  のとき

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{n+1}{n+3}b_{n-1} \\ &= \frac{n+1}{n+3} \cdot \frac{n}{n+2}b_{n-2} \\ &= \frac{n+1}{n+3} \cdot \frac{n}{n+2} \cdot \frac{n-1}{n+1}b_{n-3} \\ &= \dots \\ &= \frac{n+1}{n+3} \cdot \frac{n}{n+2} \cdot \frac{n-1}{n+1} \cdots \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5}b_1 \\ &= \frac{12}{(n+2)(n+3)}b_1\end{aligned}$$

となる。また, これは  $n=1$  のときも成り立つ。

$$(\text{答}) \quad b_n = \frac{12}{(n+2)(n+3)}b_1$$

(3)

$a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{1}{2}$  であるとき

$$\begin{aligned}b_1 &= a_2 - a_1 \\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{12}{(n+2)(n+3)} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{2}{(n+2)(n+3)} \\ &= 2\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)\end{aligned}$$

となる。よって,  $n \geq 1$  のとき

$$a_{n+1} - a_n = 2\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$$

となるから,  $n \geq 2$  のとき

$$\begin{aligned}a_n &= \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) + a_1 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} 2\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right) + \frac{1}{3} \\ &= 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+2}\right) + \frac{1}{3} \\ &= \frac{n}{n+2}\end{aligned}$$

であり,  $n=1$  とすると  $a_1 = \frac{1}{3}$  を満たすから,  $n \geq 1$  において

$$a_n = \frac{n}{n+2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{n}{n+2} \quad (n \geq 1)$$

(4)

(3)の結果より

$$\begin{aligned}(a_n)^n &= \left(\frac{n}{n+2}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-n} \\ &= \left\{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}^{-2}\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}^{-2} \\ &= e^{-2}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = e^{-2}$$

〔IV〕

〔解答〕

(1) ①  $-1$

(2) ②  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(3) ③  $\frac{2}{3}$

(4) ④  $\sqrt{2}$  ⑤  $1$

(5) ⑥  $\frac{19}{10}$

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}\frac{x+y}{5} &= \frac{y+2z}{4} = \frac{z+3x}{10} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{5} = \frac{y+2z}{4} \\ \frac{y+2z}{4} = \frac{z+3x}{10} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x - 10z \\ x = 3z \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3z \\ y = 2z \end{cases}\end{aligned}$$

であるから、 $x^3 + y^3 + z^3 = -36$  が成り立つとき

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 + z^3 &= -36 \\ \Leftrightarrow (3z)^3 + (2z)^3 + z^3 &= -36 \\ \Leftrightarrow z^3 &= -1 \\ \Leftrightarrow z &= -1\end{aligned}$$

となり、このとき

$$x = -3, y = 2$$

となる。このとき、 $\frac{x+y}{5} = \frac{y+2z}{4} = \frac{z+3x}{10}$  の値は  $-1$  である。

(2)

$$\begin{aligned}\frac{\sin x - \sin y}{\cos x + \cos y} &= \frac{2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}}{2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}} \\ &= \frac{\sin \frac{x-y}{2}}{\cos \frac{x-y}{2}}\end{aligned}$$

となるから、 $x - y = \frac{\pi}{3}$  であるとき

$$\begin{aligned}\frac{\sin x - \sin y}{\cos x + \cos y} &= \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

となる。

(3)

$$\overrightarrow{AB} = (1, 2, -1)$$

である。P が A, B を通る直線  $l$  上の点であるから、実数  $t$  を用いて

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$$

と表される。また、直線 OP と直線  $l$  が垂直に交わる時

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} + t|\overrightarrow{AB}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 + 6t &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

となる。よって、点 P の  $y$  座標は

$$1 + 2t = \frac{2}{3}$$

である。

(4)

$$\begin{cases} 4(\log_2 x)^2 + 2\log_2 y = 1 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x^2 y = 2 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

とおく。①について、真数条件より  $x > 0, y > 0$  である。このもとで②より

$$y = \frac{2}{x^2} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

となる。①、③より

$$\begin{aligned}4(\log_2 x)^2 + 2\log_2 y &= 1 \\ \Leftrightarrow 4(\log_2 x)^2 + 2\log_2 \frac{2}{x^2} &= 1 \\ \Leftrightarrow 4(\log_2 x)^2 + 2(1 - 2\log_2 x) &= 1 \\ \Leftrightarrow (2\log_2 x - 1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \log_2 x &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

であり、さらに③より

$$y = 1$$

となる。

(5)

2桁の自然数  $N$  を  $1 \leq n \leq 9, 0 \leq m \leq 9$  である整数  $n, m$  を用いて

$$N = 10n + m$$

とおくと

$$T = n + m$$

となる。このとき

$$\begin{aligned}\frac{N}{T} &= \frac{10n + m}{n + m} \\ &= 1 + \frac{9n}{n + m} \\ &= 1 + \frac{9}{1 + \frac{m}{n}} \quad (\because n \neq 0)\end{aligned}$$

となり、 $\frac{N}{T}$  が最小になるのは  $\frac{m}{n}$  が最大となるときであるから

$$(n, m) = (1, 9)$$

のときである。以上より、 $\frac{N}{T}$  の最小値は

$$\frac{N}{T} = \frac{19}{10}$$

である。