

〔Ⅰ〕 a を正の定数とする。座標平面上に曲線 $C_1: y = ax^2$ と曲線 $C_2: x = y^2$ がある。次の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C_1 と C_2 の交点のうち、原点と異なる点の座標を求めよ。
- (2) 曲線 C_1 と C_2 で囲まれた図形を D とする。 D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_1 とする。また、 D を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_2 とする。 V_1 と V_2 をそれぞれ a を用いて表せ。
- (3) (2) で求めた V_1 と V_2 について、 $V_1 \geq V_2$ となるような a の値の範囲を求めよ。また、 $V_1 - V_2$ を最大にする a の値を求めよ。

〔Ⅱ〕 a, b を実数の定数とし、3つの行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix}, R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

は $AR = QA$ を満たしている。次の をうめよ。

$AR = QA$ を満たす a の値は2つある。そのうち、 A が逆行列をもたないのは、 $a = \text{①}$ のときであり、このとき、 $b = \text{②}$ である。 A が逆行列 A^{-1} をもつのは、 $a = \text{③}$ のときであり、このとき、

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \text{④} \end{pmatrix}, b = \text{⑤} \text{ である。}$$

n を2以上の自然数として、

$$S_n = A + AR + AR^2 + \cdots + AR^{n-1}$$

とおく。 $AR = QA$ であるから、 S_n は実数 x_n, y_n を用いて

$$S_n = \begin{pmatrix} x_n & 0 \\ 0 & y_n \end{pmatrix} A$$

と表される。

$a = \text{③}$ のときは、 $x_n = \text{⑥}$, $y_n = \text{⑦}$ である。したがって、 E を単位行列として、

$$E + R + R^2 + \cdots + R^{n-1} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & s_n \end{pmatrix}$$

とおくと、 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \text{⑧}$ である。

〔Ⅲ〕 数列 $\{a_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) は、漸化式

$$(n+3)a_{n+1} - (2n+4)a_n + (n+1)a_{n-1} = 0 \quad (n \geq 2)$$

を満たしている。次の問いに答えよ。

(1) $b_n = a_{n+1} - a_n$ とおく。 b_n を b_{n-1} ($n \geq 2$) で表せ。

(2) b_n を n と b_1 を用いて表せ。

(3) $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{1}{2}$ であるとき、 a_n を求めよ。

(4) (3) で求めた a_n に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n$ を求めよ。

〔IV〕 次の をうめよ。

- (1) 実数 x, y, z が $\frac{x+y}{5} = \frac{y+2z}{4} = \frac{z+3x}{10}$ を満たしている。

$x^3 + y^3 + z^3 = -36$ が成り立つのは、

$$\frac{x+y}{5} = \frac{y+2z}{4} = \frac{z+3x}{10}$$

の値が ① のときである。

- (2) $x - y = \frac{\pi}{3}$ であるとき、 $\frac{\sin x - \sin y}{\cos x + \cos y}$ の値は ② である。

- (3) 座標空間における2点 $A(0, 1, 1)$, $B(1, 3, 0)$ を通る直線 l を考える。 l 上の点 P において、原点 O と P を結ぶ直線が直線 l と垂直に交わるとき、点 P の y 座標は ③ である。

- (4) 連立方程式 $\begin{cases} 4(\log_2 x)^2 + 2 \log_2 y = 1 \\ x^2 y = 2 \end{cases}$ を解くと、

$x =$ ④ , $y =$ ⑤ である。

- (5) 2桁^{けた}の自然数を N とし、 N の1の位と10の位の2つの数の和を T とする。

$\frac{N}{T}$ の最小値は ⑥ である。

(以 上)