

〔I〕

$$\begin{cases} 3^{x+2y} + 2^{4x+2y-3} = \frac{97}{3} & \dots\dots ① \\ 3^{x+2y+2} - 4^{2x+y-2} = -13 & \dots\dots ② \end{cases}$$

とおく。

(1)

$X = 3^{x+2y}$, $Y = 2^{4x+2y}$ とおいたとき

$$\begin{cases} 2^{4x+2y-3} = \frac{2^{4x+2y}}{2^3} = \frac{1}{8}Y \\ 3^{x+2y+2} = 3^2 \cdot 3^{x+2y} = 9X \\ 4^{2x+y-2} = \frac{4^{2x+y}}{4^2} = \frac{1}{16}(2^2)^{2x+y} = \frac{1}{16} \cdot 2^{4x+2y} = \frac{1}{16}Y \end{cases}$$

となる。これらを①, ②に代入して

$$\begin{cases} X + \frac{1}{8}Y = \frac{97}{3} & \dots\dots ③ \\ 9X - \frac{1}{16}Y = -13 & \dots\dots ④ \end{cases}$$

となる。③+④×2 より

$$19X = \frac{97}{3} - 26 = \frac{19}{3}$$

$$\therefore X = \frac{1}{3} \quad \dots\dots ⑤$$

となる。①に代入して

$$\frac{1}{8}Y = \frac{96}{3} = 32$$

$$\therefore Y = 256 \quad \dots\dots ⑥$$

となる。

$$(\text{答}) X = \frac{1}{3}, Y = 256$$

(2)

⑤より $3^{x+2y} = \frac{1}{3}$ となる。3を底とする対数をとると

$$x+2y = \log_3 \frac{1}{3}$$

となる。よって

$$x+2y = -1 \quad \dots\dots ⑦$$

となる。⑥より $2^{4x+2y} = 256$ となる。よって、2を底とする対数をとると

$$4x+2y = \log_2 2^8$$

となる。よって

$$4x+2y = 8 \quad \dots\dots ⑧$$

となる。⑧-⑦より

$$3x = 9$$

$$\therefore x = 3$$

となる。⑦に代入すると

$$3+2y = -1$$

$$\therefore y = -2$$

となる。まとめると

$$x = 3, y = -2$$

となる。

$$(\text{答}) x = 3, y = -2$$

〔Ⅱ〕

- ① 1 ② $-x+1$ ③ 2 ④ $x-1$ ⑤ $3x-5$
 ⑥ -3 ⑦ 3 ⑧ 13

[解説]

(1)

$f(x)=|x-2|+2x-3$ と置く。 x の範囲で場合分けして考える。

[1] $2<x$ のとき

このとき $\frac{5}{3}<2\leq x$ であるので

$$\begin{aligned} f(x) &= |(x-2)+2x-3| \\ &= |3x-5| \\ &= 3x-5 \end{aligned}$$

となる。

[2] $x\leq 2$ のとき

このとき

$$\begin{aligned} f(x) &= |(2-x)+2x-3| \\ &= |x-1| \end{aligned}$$

となる。したがって

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & (1<x\leq 2 \text{ のとき}) \\ -x+1 & (x\leq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。

以上[1], [2]より

$$y=\begin{cases} -x+1 & (x\leq 1 \text{ のとき}) \\ x-1 & (1<x\leq 2 \text{ のとき}) \\ 3x-5 & (2<x \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。

(2)

x の範囲で場合分けして考える。

[1] $x\leq 1$ のとき

このとき $f(x)=-x+1$ であるので $y=4$ と $y=f(x)$ の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} 4 &= -x+1 \\ \therefore x &= -3 \end{aligned}$$

となる。これは $x\leq 1$ を満たす。

[2] $1<x\leq 2$ のとき

このとき $f(x)=x-1$ である。よって $y=4$ との交点の x 座標は

$$\begin{aligned} 4 &= x-1 \\ \therefore x &= 5 \end{aligned}$$

となる。これは $1<x\leq 2$ に反するので、 $1<x\leq 2$ において $y=f(x)$ と $y=4$ は交わらない。

[3] $2<x$ のとき

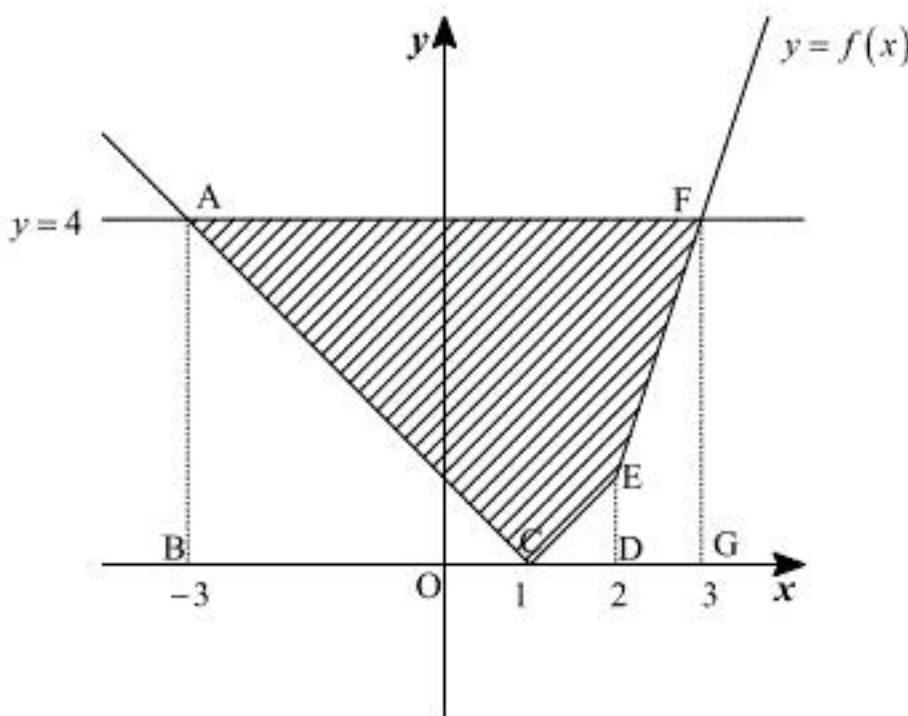
このとき $f(x)=3x-5$ である。よって $y=4$ との交点の x 座標は

$$\begin{aligned} 4 &= 3x-5 \\ \therefore x &= 3 \end{aligned}$$

となる。これは $2<x$ を満たす。

以上[1], [2]より $y=|x-2|+2x-3$ と $y=4$ は、 $x=-3$ および $x=3$ で交わる。またこのとき求め

る面積は下図斜線部の領域の面積である。



各点を図のように定める。このとき求める面積は長方形 $ABGF$ から $\triangle ABC$ 、 $\triangle CDE$ 、台形 $EDGF$ を除いた部分の面積である。長方形 $ABGF$ 、 $\triangle ABC$ 、 $\triangle CDE$ 、台形 $EDGF$ それぞれの面積を S_1, S_2, S_3, S_4 とする。このとき

$$S_1 = \{3 - (-3)\} \times 4 = 24$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \times \{1 - (-3)\} \times 4 = 8$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \times \{2 - 1\} \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$S_4 = \frac{1}{2} \times (1 + 4) \times (3 - 2) = \frac{5}{2}$$

となる。したがって求める面積は

$$\begin{aligned} S_1 - (S_2 + S_3 + S_4) &= 24 - \left(8 + \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \right) \\ &= 13 \end{aligned}$$

となる。

[Ⅲ]

$$\textcircled{1} \quad 2 \quad \textcircled{2} \quad -\frac{11}{3} \quad \textcircled{3} \quad 3 \quad \textcircled{4} \quad -\frac{2}{3} \quad \textcircled{5} \quad 2 \quad \textcircled{6} \quad \frac{5}{3} \quad \textcircled{7} \quad \frac{6-\sqrt{6}}{6}$$

[解説]

与えられた放物線の式を平方完成すると

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

となる。したがって頂点の x 座標が $\frac{11}{12}$ であることより

$$-\frac{b}{2a} = \frac{11}{12}$$

$$\therefore 11a + 6b = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また与えられた放物線の式を微分すると

$$y' = 2ax + b$$

となる。よってこの放物線が $x=1$ で直線 $y = \frac{1}{3}x + 1$ に接することより

$$a + b + c = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\frac{1}{3} = 2a + b$$

$$\therefore 6a + 3b = 1 \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。③×2－①より

$$a = 2$$

となる。これを③に代入すると

$$b = -\frac{11}{3}$$

となる。以上を①に代入すると

$$2 - \frac{11}{3} + c = \frac{4}{3}$$

$$\therefore c = 3$$

となる。以上より

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - \frac{11}{3}x + 3 & x \leq 1 \\ \frac{x}{3} + 1 & x > 1 \end{cases}$$

となる。よって積分範囲を分割して計算すると

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_t^{t+1} f(x) dx \\ &= \int_t^1 \left(2x^2 - \frac{11}{3}x + 3 \right) dx + \int_1^{t+1} \left(\frac{x}{3} + 1 \right) dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{11}{6}x^2 + 3x \right]_t^1 + \left[\frac{x^2}{6} + x \right]_1^{t+1} \\ &= \left(\frac{2}{3} - \frac{11}{6} + 3 \right) - \left(\frac{2}{3}t^3 - \frac{11}{6}t^2 + 3t \right) + \left\{ \frac{(t+1)^2}{6} + (t+1) \right\} - \left(\frac{1}{6} + 1 \right) \\ &= -\frac{2}{3}t^3 + 2t^2 - \frac{5}{3}t + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

となる。 $F(t)$ を微分すると

$$\begin{aligned} F'(t) &= -2t^2 + 4t - \frac{5}{3} \\ &= -2 \left(t - \frac{6+\sqrt{6}}{6} \right) \left(t - \frac{6-\sqrt{6}}{6} \right) \end{aligned}$$

となる。したがって $F(t)$ の増減表は

t	0	...	$\frac{6-\sqrt{6}}{6}$	...	1
$F'(t)$		-	0	+	
$F(t)$		↘		↗	

となる。したがって $F(t)$ は $t = \frac{6-\sqrt{6}}{6}$ において最小となる。