

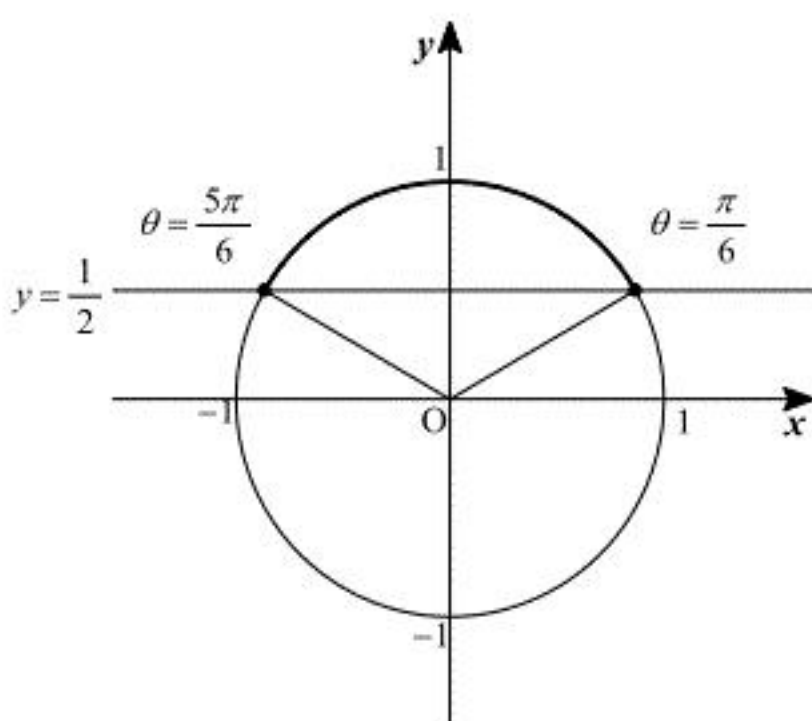
〔Ⅰ〕

(1)

$\sin \theta = \frac{1}{2}$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を解くと

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$

となる。



よって上の単位円図より

$$\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$$

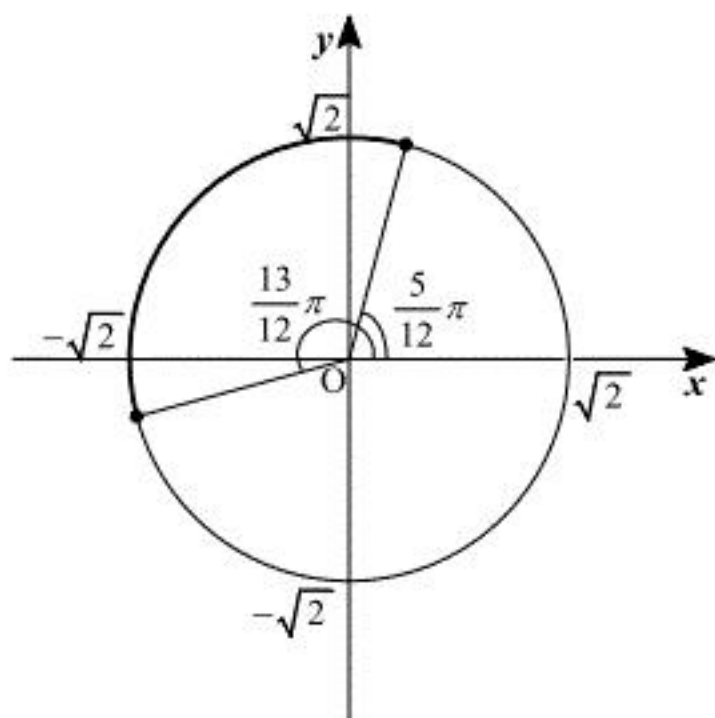
となる。

(答) $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$

(2)

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta \right) \\ &= \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

である。 $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$ の各辺に $\frac{\pi}{4}$ を足して、 $\frac{5}{12}\pi \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{13}{12}\pi$ となる。よって下図のようになる。



上図より $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ (つまり $\theta = \frac{\pi}{4}$) のとき $f(\theta)$ は最大値 $\sqrt{2}$ をとり、 $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{12}$ (つまり

$\theta = \frac{5\pi}{6}$) のとき $f(\theta)$ は最小値 $\sin \frac{5}{6}\pi + \cos \frac{5}{6}\pi = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ をとる。

(答) 最大値 $\sqrt{2}$ ($\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき)
最小値 $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ ($\theta = \frac{5\pi}{6}$ のとき)

〔Ⅱ〕

$$\textcircled{1} \quad \frac{15}{2} \quad \textcircled{2} \quad -\frac{1}{2} \quad \textcircled{3} \quad 7 \quad \textcircled{4} \quad \frac{1}{2} \quad \textcircled{5} \quad -\frac{1}{6} \quad \textcircled{6} \quad 2$$

〔解説〕

与えられた関係式を

$$3S_n = a_n + 7 \cdot 3^n - 6 \quad \cdots \textcircled{1}$$

とする。①において $n=1$ とすると、 $S_1 = a_1$ であることより

$$3a_1 = a_1 + 7 \cdot 3 - 6$$

$$\therefore a_1 = \frac{15}{2}$$

となる。また①より

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= S_{n+1} - S_n \\ &= \frac{1}{3} \{ (a_{n+1} + 7 \cdot 3^{n+1} - 6) - (a_n + 7 \cdot 3^n - 6) \} \\ &= \frac{1}{3} a_{n+1} - \frac{1}{3} a_n + 14 \cdot 3^{n-1} \end{aligned}$$

$$\therefore a_{n+1} = -\frac{1}{2} a_n + 7 \cdot 3^n$$

となる。この式の両辺を 3^{n+1} で割ると、 $b_n = \frac{a_n}{3^n}$ であることより

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} &= -\frac{1}{6} \cdot \frac{a_n}{3^n} + \frac{7}{3} \\ \Leftrightarrow b_{n+1} &= -\frac{1}{6} b_n + \frac{7}{3} \\ \Leftrightarrow b_{n+1} - 2 &= -\frac{1}{6} (b_n - 2) \end{aligned}$$

となる。これより、数列 $\{b_n - 2\}$ は初項 $b_1 - 2 = \frac{a_1}{3} - 2 = \frac{1}{2}$ 、公比 $-\frac{1}{6}$ の等比数列であるので

$$\begin{aligned} b_n - 2 &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{6} \right)^{n-1} \\ \therefore b_n &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{6} \right)^{n-1} + 2 \end{aligned}$$

となる。よって $b_n = \frac{a_n}{3^n}$ であることより、この式の両辺に 3^n をかけると、 a_n が得られる。

〔Ⅲ〕

$$\textcircled{1} \quad k < 0 \quad \textcircled{2} \quad k = 0 \quad \textcircled{3} \quad 0 < k < 2, \frac{9}{4} < k \quad \textcircled{4} \quad k = 2, \frac{9}{4} \quad \textcircled{5} \quad 2 < k < \frac{9}{4} \quad \textcircled{6} \quad \frac{8}{3}$$

〔解説〕

(1)

$h(x) = |x(x+2)| - x$ とおく。このとき

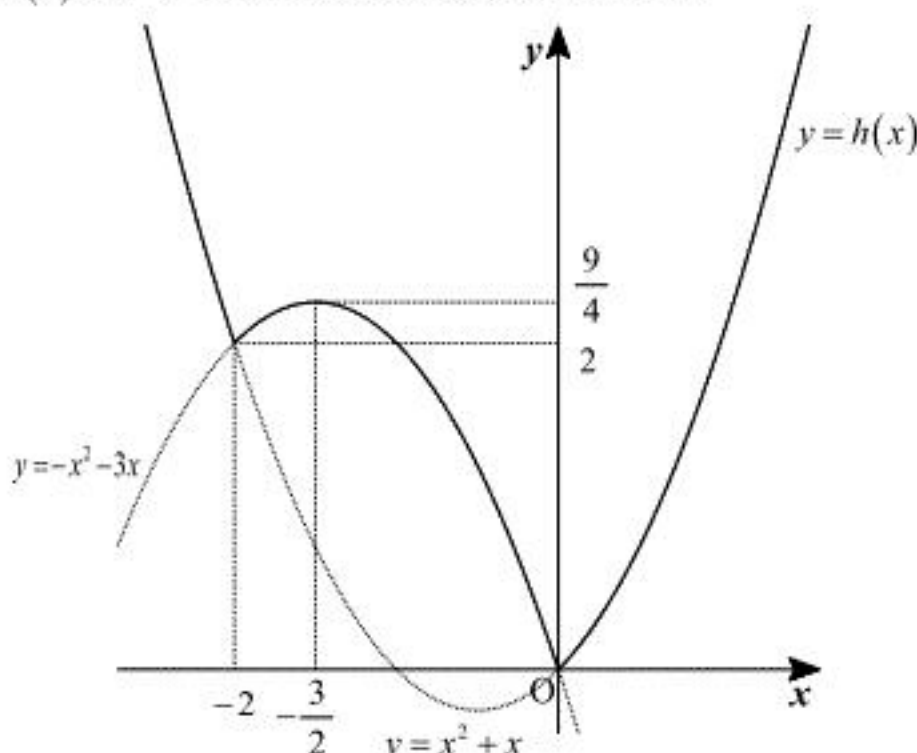
$$|x(x+2)| = x+k$$

$$\Leftrightarrow h(x) = k$$

であるので C と l の共有点の個数は $y = h(x)$ のグラフと直線 $y = k$ のグラフの共有点の数に等しい。ここで

$$h(x) = \begin{cases} x^2 + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} & (x < -2, 0 \leq x \text{ のとき}) \\ -x^2 - 3x = -\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} & (-2 \leq x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるので $y = h(x)$ のグラフは下図の実線部のようになる。



したがって $y = h(x)$ と直線 $y = k$ のグラフの共有点の数、すなわち C と l の共有点の個数は

$k < 0$ のとき 0 個

$k = 0$ のとき 1 個

$0 < k < 2, \frac{9}{4} < k$ のとき 2 個

$k = 2, \frac{9}{4}$ のとき 3 個

$2 < k < \frac{9}{4}$ のとき 4 個

となる。

(2)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x < -2, 0 \leq x \text{ のとき} \\ -x^2 - 2x & -2 \leq x < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

である。したがって $-2 \leq x < 0$ の範囲における曲線 C と直線 $y = 1$ の交点の x 座標は

$$-x^2 - 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 0$$

$$\therefore x = -1$$

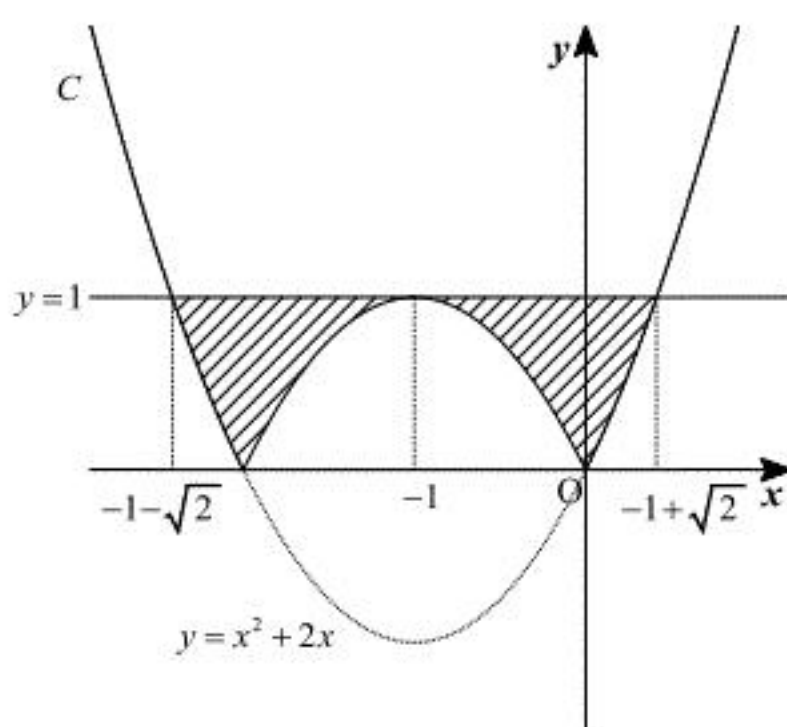
となる。また $x < -2, 0 \leq x$ における曲線 C と直線 $y = 1$ の交点の x 座標は

$$x^2 + 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\therefore x = -1 \pm \sqrt{2}$$

となる。よって求めるのは下図斜線部の面積である。



直線 $y = 1$ と放物線 $y = x^2 + 2x$ によって囲まれる図形の面積を S ，直線 $y = 0$ と放物線 $y = x^2 + 2x$ によって囲まれる図形の面積を T とする。 $y = f(x)$ のグラフは、放物線 $y = x^2 + 2x$ のグラフの $-2 \leq x \leq 0$ の部分を x 軸に関して折り返して得られる図形に等しい。したがって直線 $y = 1$ と $y = f(x)$ によって囲まれる領域の面積は $S - 2T$ である。ここで

$$\begin{aligned} T &= -\int_{-2}^0 x(x+2) dx \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1-\sqrt{2}}^{-1+\sqrt{2}} (1 - x^2 - 2x) dx \\ &= -\int_{-1-\sqrt{2}}^{-1+\sqrt{2}} \left\{ x - (-1-\sqrt{2}) \right\} \left\{ x - (-1+\sqrt{2}) \right\} dx \\ &= \frac{1}{6} \left\{ (-1+\sqrt{2}) - (-1-\sqrt{2}) \right\}^3 \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

である。したがって求める面積は

$$S - 2T = \frac{8}{3}(\sqrt{2} - 1)$$

となる。