

〔Ⅰ〕

(1)

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - ax + 1 \\ g(x) = -x^2 + (a+4)x - 3a + 1 \end{cases}$$

とおく。 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が 2 交点を持つとき

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \Leftrightarrow x^2 - ax + 1 &= -x^2 + (a+4)x - 3a + 1 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 2(a+2)x + 3a &= 0 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。解と係数の関係より

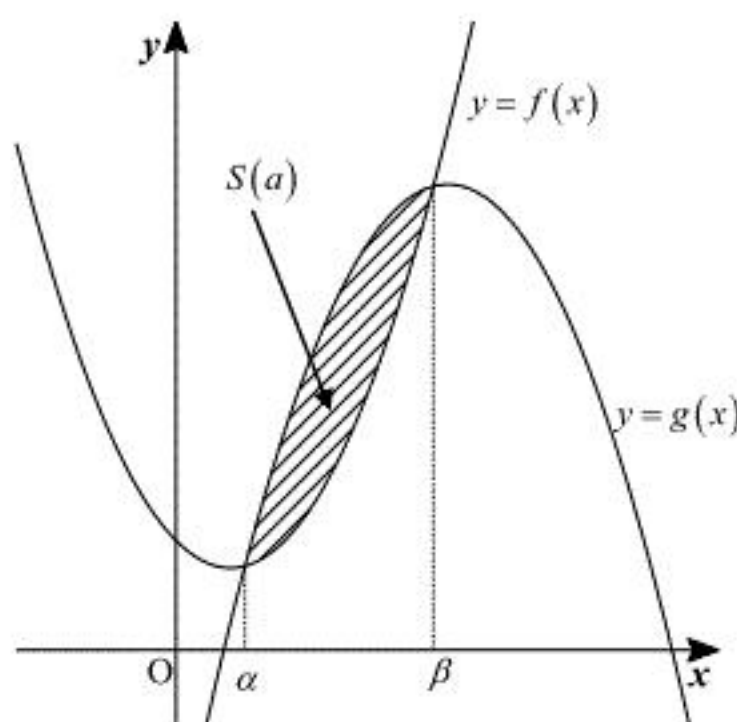
$$\alpha + \beta = a + 2, \alpha\beta = \frac{3}{2}a$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \alpha + \beta = a + 2, \alpha\beta = \frac{3}{2}a$$

(2)

$\alpha < \beta$ とすると $\alpha \leq x \leq \beta$ であり、この範囲において $g(x) \geq f(x)$ である。



よって

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{\alpha}^{\beta} \{g(x) - f(x)\} dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \{-2(x-\alpha)(x-\beta)\} dx \\ &= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 \\ &= \frac{1}{3}\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{3}\{(\beta+\alpha)^2 - 4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{3}(a^2 - 2a + 4)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S(a) = \frac{1}{3}(a^2 - 2a + 4)^{\frac{3}{2}}$$

(3)

①式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (a+2)^2 - 2 \cdot 3a \\ &= a^2 - 2a + 4 \\ &= (a-1)^2 + 3 \\ &> 0 \end{aligned}$$

となるから、二つの放物線は a の値に関係なく異なる二点で交わる。ここで

$$\begin{aligned} S(a) &= \frac{1}{3}(a^2 - 2a + 4)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{3}\{(a-1)^2 + 3\}^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

である。よって $S(a)$ は $(a-1)^2 + 3$ が最小のとき、すなわち $a=1$ のとき最小値

$$S(1) = \frac{1}{3} \cdot 3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3}$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad \text{最小値 } \sqrt{3} \quad (a=1 \text{ のとき})$$

【Ⅱ】

$$\textcircled{1} \quad 3 \quad \textcircled{2} \quad 30 \quad \textcircled{3} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \textcircled{4} \quad \left(\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}\right) \quad \textcircled{5} \quad 2\sqrt{3} \quad \textcircled{6} \quad \left(\frac{7}{3}, 3, \frac{8}{3}\right)$$

【解説】

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 3\end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned}\cos \angle BAC &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} \\ &= \frac{3}{\sqrt{6} \sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

となるので $0 < \angle BAC < 180^\circ$ より

$$\angle BAC = 30^\circ$$

となる。したがって $\triangle ABC$ の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。 $DG = h$ とおくと四面体 $ABCD$ の体積は

$$\triangle ABC \times \frac{h}{3} = \frac{\sqrt{3}h}{6}$$

となる。したがって四面体 $ABCD$ の体積が 1 のとき

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}h}{6} &= 1 \\ \therefore h &= \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。

$$\overrightarrow{GD} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

とおく。このとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GD} \\ &= \begin{pmatrix} x + \frac{1}{3} \\ y + 1 \\ z + \frac{2}{3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。よって D の x 座標が正であることより

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{3} &> 0 \\ \therefore x &> -\frac{1}{3} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。 $DG \perp AB$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ \therefore x - 2y + z &= 0 \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。同様に $DG \perp AC$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{AC} &= 0 \\ \therefore -y + z &= 0 \quad \dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

となる。また $h = |\overrightarrow{GD}| = 2\sqrt{3}$ より

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} &= 2\sqrt{3} \\ \therefore x^2 + y^2 + z^2 &= 12 \quad \dots \textcircled{4}\end{aligned}$$

となる。③より $y = z$ でありこれを②に代入すると

$$\begin{aligned}x - 2y + y &= 0 \\ \therefore x &= y\end{aligned}$$

となる。したがって

$$x = y = z$$

である。これを④に代入すると

$$\begin{aligned}3x^2 &= 12 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 4\end{aligned}$$

となる。したがって①より

$$x = 2$$

となる。よって

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{3} \\ 2 + 1 \\ 2 + \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ 3 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

となる。したがって D の座標は $\left(\frac{7}{3}, 3, \frac{8}{3}\right)$ である。

〔Ⅲ〕

① $\frac{2}{91}$ ② $\frac{25}{91}$ ③ $\frac{12}{91}$ ④ $\frac{47}{91}$ ⑤ $\frac{37}{455}$

〔解説〕

(1)

15枚のカードから3枚のカードを取り出すので、カードの取り出し方の全事象は

$${}_{15}C_3 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 455 \text{通り}$$

である。3枚とも赤色のカードであるような取り出し方は

$${}_5C_3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \text{通り}$$

である。したがって求める確率は

$$\frac{10}{455} = \frac{2}{91}$$

となる。

(2)

赤色、白色、青色のカードが1枚ずつあるような取り出し方は、それぞれの色のカードに1から5のどの数字が書かれているかを考えると 5^3 通りである。したがって求める確率は

$$\frac{5^3}{455} = \frac{25}{91}$$

となる。

(3)

赤色、白色、青色のカードが1枚ずつありかつ3枚のカードの数字が異なるような取り出し方は、どの3つの数字が選ばれるかと、どの色のカードにどの数字が書かれているかを考えると

$${}_5C_3 \cdot 3! = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{通り}$$

である。したがって求める確率は

$$\frac{60}{455} = \frac{12}{91}$$

となる。

(4)

3枚のカードの数字の積が5の倍数でないための条件は、3枚のカードに書かれた数字の中に5が含まれないことである。そのような取り出し方は

$${}_{12}C_3 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220 \text{通り}$$

ある。したがって求める確率は3枚のカードの数字の積が5の倍数でない確率の余事象の確率であるので

$$1 - \frac{220}{455} = \frac{47}{91}$$

となる。

(5)

3枚のカードの数字の積が9の倍数であるための条件は3枚のカードに3が書かれたカードが少なくとも2枚含まれていることである。3枚のカードの中に3が書かれたカードが2枚のみであるような取り出し方は

$${}_3C_2 \cdot 12 = 36 \text{通り}$$

である。3枚のカード全てに3が書かれているような取り出し方は1通りである。したがって求める確率は

$$\frac{1+36}{455} = \frac{37}{455}$$

となる。