

〔Ⅰ〕

(1)

$f(x)$ の定義域は $x > 0$ である。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\log x)' x^2 - \log x \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} \\ &= \frac{1 - 2 \log x}{x^3} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \log x &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt{e} \end{aligned}$$

であり、増減表は下図のようになる。

x	0	...	$\sqrt{e}$	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$

以上より、 $f(x)$ は $x = \sqrt{e}$ で極大値 $\frac{1}{2e}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = \frac{1 - 2 \log x}{x^3}, \quad x = \sqrt{e} \text{ のとき極大値 } \frac{1}{2e}$$

(2)

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(1 - 2 \log x)' x^3 - (1 - 2 \log x)(x^3)'}{(x^3)^2} \\ &= \frac{6 \log x - 5}{x^4} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= e^{\frac{5}{6}} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad f''(x) = \frac{6 \log x - 5}{x^4}, \quad x = e^{\frac{5}{6}}$$

(3)

$g(x) = 2\sqrt{x} - \log x$ とおく。

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x} - 1}{x}, \\ g'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 1 \end{aligned}$$

であるから、増減表は以下のようにになる。

x	0	...	1	...
$g'(x)$	$\diagdown$	-	0	+
$g(x)$	$\diagdown$	$\searrow$	2	$\nearrow$

よって $g(x)$ は $x = 1$ で最小値 2 をとる。したがって、 $g(x) \geq 2 > 0$ であるから $g(x) > 0$ が示された。

(証明終)

(4)

(3) より $x > 1$ において、 $0 < \log x < 2\sqrt{x}$ であるから、各辺を x^2 で割って

$$0 < \frac{\log x}{x^2} < \frac{2}{x\sqrt{x}}$$

が得られる。ここで $\lim_{x \rightarrow \infty} 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x\sqrt{x}} = 0$ であるから、はさみうちの原理より、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^2} = 0$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^2} = 0$$

(5)

正の実数 t について $\int_1^t f(x) dx$ を計算すると、

$$\begin{aligned} \int_1^t f(x) dx &= \int_1^t \frac{\log x}{x^2} dx \\ &= \left[-\frac{\log x}{x} \right]_1^t - \int_1^t \left(-\frac{1}{x} \right) \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= -\frac{\log t}{t} + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^t \\ &= -\frac{\log t}{t} - \frac{1}{t} + 1 \end{aligned}$$

が得られる。ここで $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_1^\alpha f(x) dx$ を考える。 $\alpha \rightarrow \infty$ を考えるので $\alpha > 1$ として考えてよく、

(3) より $\alpha > 1$ において、 $0 < \log \alpha < 2\sqrt{\alpha}$ であるから両辺を α で割って、

$$0 < \frac{\log \alpha}{\alpha} < \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$$

となる。ここで $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} 0 = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{\alpha}} = 0$ であるから、はさみうちの原理より、

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\log \alpha}{\alpha} = 0$$

であり、さらに $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} = 0$ であることから、

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_1^\alpha f(x) dx = 1$$

となる。よって c は等式 $-\frac{\log c}{c} - \frac{1}{c} + 1 = 1$ を満たす正の実数である。これを解くと、

$$\begin{aligned} \log c &= -1 \\ \therefore c &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad c = \frac{1}{e}$$

〔Ⅱ〕

〔解答〕

① 4 ② 1 ③ 1 ④ $-3 \leq a \leq 5$

⑤ 10 ⑥ 10 ⑦ 4

〔解説〕

(1)

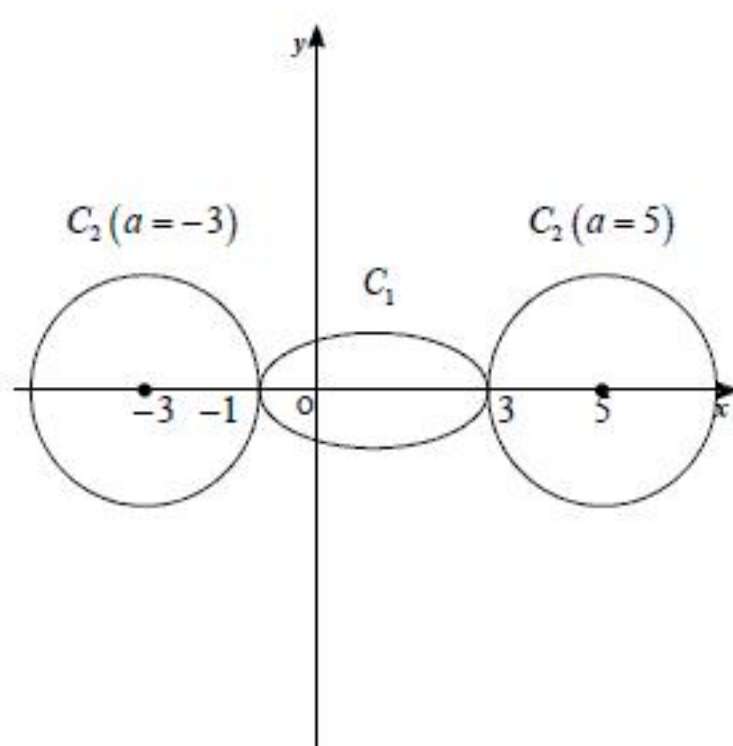
曲線 C_1 の方程式は,

$$x^2 + 4y^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{4} + y^2 = 1$$

であるから C_1 は楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ を x 軸方向に 1 だけ移動した楕円である。

(2)



円 C_2 は中心 $(a, 0)$, 半径 2 の円であり, 中心は x 軸上を動く。また, 上図より, $a = -3, 5$ のときに C_1 と C_2 は接することがわかる。したがって, 求める条件は, $-3 \leq a \leq 5$ となる。

(3)

$a = 0$ のとき C_2 の方程式は $x^2 + y^2 = 4$ となる。これと C_1 の方程式から y^2 を消去すると,

$$x^2 + 4(4 - x^2) - 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 13 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm 2\sqrt{10}}{3}$$

となる。 $-1 \leq x \leq 3$ より, 点 P の x 座標は $\frac{-1 + 2\sqrt{10}}{3}$ となる。

点 (x_1, y_1) における楕円 C_1 の接線の方程式は

$$\frac{x_1 - 1}{4}(x - 1) + y_1 y = 1$$

であるから, 点 P における C_1 の接線と x 軸の交点の座標を $(p, 0)$ とすると,

$$\frac{\frac{-1 + 2\sqrt{10}}{3} - 1}{4}(p - 1) + 0 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2 + \sqrt{10}}{6}(p - 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow p - 1 = 2 + \sqrt{10}$$

$$\therefore p = 3 + \sqrt{10}$$

である。また, 点 (x_1, y_1) における円 C_2 の接線の方程式は

$$x_1 x + y_1 y = 4$$

であるから, 点 P における C_2 の接線と x 軸の交点の座標を $(q, 0)$ とすると,

$$\frac{-1 + 2\sqrt{10}}{3} q + 0 = 4$$

$$\therefore q = \frac{12}{-1 + 2\sqrt{10}} = \frac{8\sqrt{10} + 4}{13}$$

である。

【Ⅲ】

【解答】

(1)

$$\textcircled{1} \ 1 \quad \textcircled{2} \ 2 \quad \textcircled{3} \ 2-\sqrt{3} \quad \textcircled{4} \ 3+\sqrt{3}$$

(2)

$$\textcircled{5} \ A+B$$

(3)

点 P を点 $f(P)$ を中心として $\frac{\pi}{3}$ または $-\frac{\pi}{3}$ 回転させた点が $(f \circ f)(P)$ と一致すればよい。回

転角が $\frac{\pi}{3}$ のとき、一致する条件は(2)の条件であり、

$$(A+B)V=O \quad \dots \textcircled{2}$$

である。②式で $A+B$ が逆行列を持つと仮定すると、②の両辺に $A+B$ の逆行列 $(A+B)^{-1}$ を左

からかけて

$$V=O$$

となる。しかし、これは点 P と点 $f(P)$ が一致することを示すので題意にそぐわない。したが

って、 $A+B$ は逆行列を持たない。

$$A+B=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+\frac{1}{2} & -b-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ b+\frac{\sqrt{3}}{2} & a+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

であり行列式が0であれば良いので、

$$\begin{aligned} \left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(b+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 &=0 \\ \Leftrightarrow a &=-\frac{1}{2}, b=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

となる。またこのとき $A+B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ であるから題意を満たす。

回転角が $-\frac{\pi}{3}$ のときは、 B を $\begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$ に置き換え、同様にして、

$$\begin{pmatrix} a+\frac{1}{2} & -b+\frac{\sqrt{3}}{2} \\ b-\frac{\sqrt{3}}{2} & a+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

の行列式が0となればよい。したがって、

$$\begin{aligned} \left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 &=0 \\ \Leftrightarrow a &=-\frac{1}{2}, b=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

となる。以上より、 $(a, b)=\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ である。

$$(\text{答}) \ (a, b)=\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

(4)

$|\overline{Pf(P)}|=|V|=1$ であればよい。

$$\begin{aligned} V &=\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}-A\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \mp\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} \frac{3}{2}c \\ \mp\frac{\sqrt{3}}{2}c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} |V| &=1 \\ \Leftrightarrow \frac{9}{4}c^2+\frac{3}{4}c^2 &=1 \\ \Leftrightarrow c^2 &=\frac{1}{3} \\ \therefore c &=\frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\because c>0) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \ c=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

【解説】

(1)

点 Q を点 R を中心として反時計周りに $\frac{\pi}{3}$ 回転した点を Q' とすると

$$\overline{RQ'}=\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}\overline{RQ}$$

となるので、

$$\begin{aligned} \overline{OQ'} &=\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}\overline{RQ}+\overline{OR} \\ &=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3-1 \\ 4-2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 2-\sqrt{3} \\ 3+\sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって、 $Q'(2-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$ である。

(2)

点 $f(P)$ を中心とした回転は(1)での議論と同様であり、 $(f \circ f)$ を表す行列は A^2 であること

から、

$$\begin{aligned} B\left(\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}-A\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}\right)+A\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} &=A^2\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow BV+A\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} &=A^2\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

という条件が求められる。

また、 V の定義から $A\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}=-V+\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ であり、この両辺に左から A をかけて

$$A^2\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}=-AV+A\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$$

である。これを①に代入して、

$$\begin{aligned} BV+A\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} &=-AV+A\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow (A+B)V &=O \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

$$\begin{array}{llll} \textcircled{1} & -\frac{3}{2} & \textcircled{2} & n \cdot 2^{n-1} \quad \textcircled{3} \quad \sqrt{2} \quad \textcircled{4} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \textcircled{5} & \frac{(x-1)^2}{36} - \frac{y^2}{4} & \textcircled{6} & \frac{x-1}{3} \quad \textcircled{7} \quad (a, b) = \left(1, -\frac{3}{4}\right) \quad \textcircled{8} \quad \frac{1}{2} \end{array}$$

〔解説〕

(1) $-x=t$ とおくと $x \rightarrow -\infty$ のとき $t \rightarrow \infty$ であるから、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} + x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2 - 3t} - t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-3t}{\sqrt{t^2 - 3t} + t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-3}{\sqrt{1 - \frac{3}{t}} + 1} \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。

(2)

${}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ であるから、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k {}_nC_k &= \sum_{k=1}^n \frac{k \cdot n!}{k!(n-k)!} \\ &= \sum_{k=1}^n n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= n \sum_{k=1}^n {}_{n-1}C_{k-1} \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k \\ &= n \cdot (1+1)^{n-1} \\ &= n \cdot 2^{n-1} \end{aligned}$$

である。

(3)

$$\begin{aligned} &\cos^2 t + \left(\frac{-1 + \sin t}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{1 + \sin t}{\sqrt{2}} \right)^2 \\ &= \cos^2 t + \sin^2 t + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

であるから球の半径は $\sqrt{2}$ となる。

$$\begin{aligned} \overline{\text{OQ}} \cdot \overline{\text{QP}} &= \overline{\text{OQ}} \cdot (\overline{\text{OP}} - \overline{\text{OQ}}) \\ &= (0, s, -s) \cdot \left\{ \left(\cos t, \frac{-1 + \sin t}{\sqrt{2}}, \frac{1 + \sin t}{\sqrt{2}} \right) - (0, s, -s) \right\} \\ &= s \cdot \frac{-1 + \sin t}{\sqrt{2}} - s \cdot \frac{1 + \sin t}{\sqrt{2}} - 2s^2 \\ &= -\sqrt{2}s - 2s^2 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \overline{\text{OQ}} \cdot \overline{\text{QP}} &= 0 \\ \Leftrightarrow -s(\sqrt{2} + 2s) &= 0 \\ \therefore s &= 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

と求まる。

(4)

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x = 3^{t+1} + 3^{-t+1} + 1 \\ y = 3^t - 3^{-t} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x - 1 = 3^{t+1} + 3^{-t+1} \\ 3y = 3^{t+1} - 3^{-t+1} \end{cases} \end{aligned}$$

であるから、二乗して差をとると

$$\begin{aligned} (x-1)^2 - (3y)^2 &= 2 \cdot 3^{t+1} \cdot 3^{-t+1} - (-2 \cdot 3^{t+1} \cdot 3^{-t+1}) \\ &= 36 \\ \therefore \frac{(x-1)^2}{36} - \frac{y^2}{4} &= 1 \end{aligned}$$

となる。また漸近線のうち傾きが正のものの方程式は

$$y = \frac{x-1}{3}$$

となる。

(5)

$$\begin{aligned} &\sin \theta \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \sin \theta \left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{3} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{3} \right) \left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{3} - \cos \theta \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \sin \theta \left(\frac{1}{4} \sin^2 \theta - \frac{3}{4} \cos^2 \theta \right) \\ &= \sin \theta \left\{ \frac{1}{4} \sin^2 \theta - \frac{3}{4} (1 - \sin^2 \theta) \right\} \\ &= \sin^3 \theta - \frac{3}{4} \sin \theta \end{aligned}$$

となるので、 $(a, b) = \left(1, -\frac{3}{4}\right)$ である。

(6)

$f(x)$ は初項 x^2 、公比 $\frac{1}{1+2x^2}$ の無限等比級数であり、 $x \neq 0$ のとき公比が $0 < \frac{1}{1+2x^2} < 1$ であることから収束する。よって $x \neq 0$ のとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x^2 \left(\frac{1}{1+2x^2} \right)^k \\ &= x^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+2x^2}} \\ &= \frac{1+2x^2}{2} \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。