

〔 I 〕 x の関数 $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$ に対して、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求め、 $f(x)$ の極値を求めよ。
- (2) $f(x)$ の第 2 次導関数 $f''(x)$ を求め、さらに $f''(x) = 0$ を満たす x の値を求めよ。
- (3) $x > 0$ において、 $2\sqrt{x} - \log x > 0$ を示せ。
- (4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^2}$ を求めよ。
- (5) $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a f(x) dx = \int_1^c f(x) dx$ を満たす正の定数 c を求めよ。

〔Ⅱ〕 a を実数の定数とし、曲線 $x^2 + 4y^2 - 2x - 3 = 0$ を C_1 とし、円 $(x - a)^2 + y^2 = 4$ を C_2 とする。次の をうめよ。

(1) 曲線 C_1 は楕円 $\frac{x^2}{\text{①}} + \frac{y^2}{\text{②}} = 1$ を x 軸方向に ③ だけ平行移動した楕円を表す。

(2) 曲線 C_1 と円 C_2 が共有点をもつような a の値の範囲は ④ である。

(3) $a = 0$ のとき、 C_1 と C_2 の共有点は 2 点あり、そのうち y 座標が正である点を P とする。点 P の x 座標の値は $\frac{-1 + 2\sqrt{\text{⑤}}}{3}$ である。また、点 P における C_1 の接線が x 軸と交わる点の x 座標の値は $3 + \sqrt{\text{⑥}}$ であり、点 P における C_2 の接線が x 軸と交わる点の x 座標の値は $\frac{8\sqrt{10} + \text{⑦}}{13}$ である。

〔Ⅲ〕 $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ($b \neq 0$) が表す 1 次変換を f とする。点 $P(c, 0)$ ($c > 0$) を考える。次の問いに答えよ。

(1) 次の ① から ④ を数値でうめよ。

点 $Q(3, 4)$ を、点 $R(1, 2)$ を中心として反時計まわりに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点の座標は

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 - \text{①} \\ 4 - \text{②} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{①} \\ \text{②} \end{pmatrix}$$

を計算することにより、(③, ④) である。

(2) $B = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおく。

点 P を、点 $f(P)$ を中心として反時計まわりに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点が $(f \circ f)(P)$ と一致するという条件を A , B , V , O を用いて表すと、(⑤) $V = O$ と表すことができる。 A と B を用いて ⑤ をうめよ。

(3) 3 点 P , $f(P)$, $(f \circ f)(P)$ が正三角形の 3 つの頂点をなすとき、 a , b の値を求めよ。

(4) (3) の正三角形の 1 辺の長さが 1 になるとき、 c の値を求めよ。

〔IV〕 次の をうめよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} + x)$ の値は ① である。

(2) $\sum_{k=1}^n k_n C_k$ を計算すると ② となる。

(3) 座標空間の原点を O とし, t を実数とする。どのような t の値に対しても, 点 $P\left(\cos t, \frac{-1+\sin t}{\sqrt{2}}, \frac{1+\sin t}{\sqrt{2}}\right)$ は原点を中心とする半径 ③ の球面上にある。また, 実数 s に対して, 点 $Q(0, s, -s)$ とするとき, $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{QP} = 0$ となるような s の値は $s = 0$ と $s =$ ④ である。

(4) 媒介変数表示

$$x = 3^{t+1} + 3^{-t+1} + 1, \quad y = 3^t - 3^{-t}$$

で表される図形は, x, y についての方程式 ⑤ $= 1$ で定まる双曲線 C の $x > 0$ の部分である。また, C の漸近線で傾きが正の漸近線の方程式は $y =$ ⑥ である。

(5) θ の関数 $\sin \theta \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ は, 定数 a, b を用いて $a \sin^3 \theta + b \sin \theta$ と表すことができる。 a, b の組 (a, b) は ⑦ である。

(6) 無限級数の和として定義される関数

$$f(x) = x^2 + \frac{x^2}{1+2x^2} + \frac{x^2}{(1+2x^2)^2} + \cdots + \frac{x^2}{(1+2x^2)^n} + \cdots$$

について, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ の値は ⑧ である。

(以 上)