

〔Ⅰ〕

(1)

$y' = 2x$ であるから、点 $(a, a^2 + 1)$ における放物線 C の接線 l の方程式は、

$$\begin{aligned} l: y &= 2a(x - a) + a^2 + 1 \\ &= 2ax - a^2 + 1 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。接線 l と y 軸の交わる点の y 座標が y_a であるから、

$$y_a = -a^2 + 1$$

である。したがって、 $y_a < 0$ のとき、

$$\begin{aligned} y_a &< 0 \\ \Leftrightarrow -a^2 + 1 &< 0 \\ \Leftrightarrow a^2 &> 1 \\ \therefore a &> 1 \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $a > 1$

(2)

接線 l と x 軸の交点は、①に $y = 0$ を代入して、

$$\begin{aligned} 0 &= 2ax - a^2 + 1 \\ \Leftrightarrow 2ax &= a^2 - 1 \\ \therefore x &= \frac{a^2 - 1}{2a} \quad (\because a > 1) \end{aligned}$$

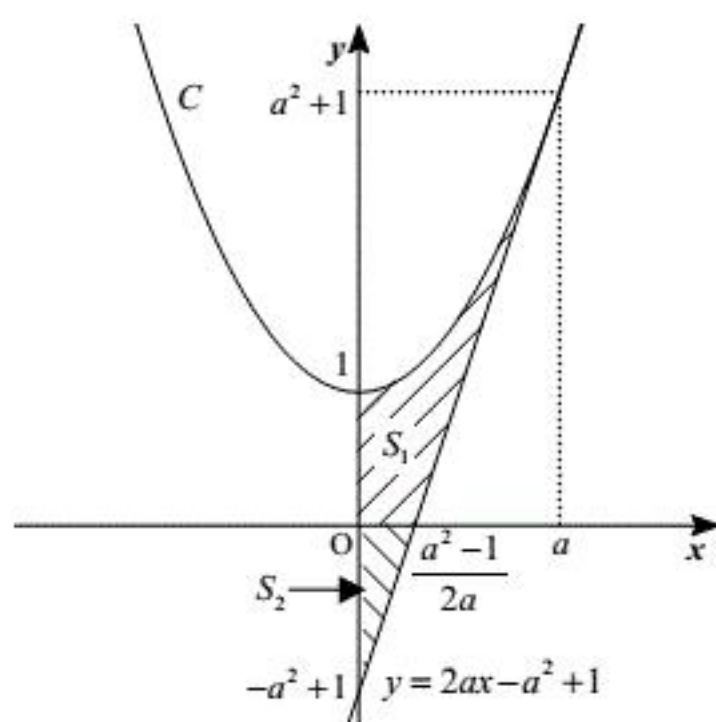
であるから、

$$\left(\frac{a^2 - 1}{2a}, 0 \right)$$

である。また、(1)より、 $a > 1$ であるから、

$$\frac{a^2 - 1}{2a} > 0$$

である。したがって、 S_1, S_2 は下図の通りである。



したがって、 $-a^2 + 1 < 0$ に注意して、

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^a (x^2 + 1) dx - \left(a - \frac{a^2 - 1}{2a} \right) \cdot (a^2 + 1) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^a - \frac{a^2 + 1}{2a} \cdot (a^2 + 1) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{3}a^3 + a - \frac{(a^2 + 1)^2}{4a} \\ S_2 &= \frac{a^2 - 1}{2a} \cdot (a^2 - 1) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{(a^2 - 1)^2}{4a} \end{aligned}$$

と求まる。 $S_1 : S_2 = 2 : 1$ のとき、

$$\begin{aligned} S_1 &= 2S_2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3}a^3 + a - \frac{(a^2 + 1)^2}{4a} &= 2 \cdot \frac{(a^2 - 1)^2}{4a} \\ \Leftrightarrow 4a^4 + 12a^2 - 3(a^2 + 1)^2 &= 6(a^2 - 1)^2 \quad (\because a > 1) \\ \Leftrightarrow a^4 + 6a^2 - 3 &= 6a^4 - 12a^2 + 6 \\ \Leftrightarrow 5a^4 - 18a^2 + 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow (5a^2 - 3)(a^2 - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{5}a + \sqrt{3})(\sqrt{5}a - \sqrt{3})(a + \sqrt{3})(a - \sqrt{3}) &= 0 \\ a &= \sqrt{3} \quad (\because a > 1) \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $a = \sqrt{3}$

〔Ⅱ〕

(1)

$$a_{n+1} = na_n + n^2 - 2 \quad (n \geq 1) \quad \dots \textcircled{1}$$

$n \geq 1$ のとき,

$$\begin{cases} b_n = a_n + pn + q \\ b_{n+1} = a_{n+1} + p(n+1) + q \end{cases}$$

であるから, $b_{n+1} = nb_n$ のとき,

$$\begin{aligned} a_{n+1} + p(n+1) + q &= na_n + pn^2 + qn \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - na_n &= pn^2 + (-p+q)n - (p+q) \end{aligned}$$

が成り立つ。上式に①を代入して,

$$\begin{aligned} n^2 - 2 &= pn^2 + (-p+q)n - (p+q) \\ \Leftrightarrow (p-1)n^2 + (-p+q)n + (-p-q+2) &= 0 \end{aligned}$$

となる。上式がすべての自然数 n について成り立てば良いから,

$$\begin{cases} p-1=0 \\ -p+q=0 \\ -p-q+2=0 \end{cases}$$

となればよい。したがって, 上の連立方程式を解いて,

$$(p, q) = (1, 1)$$

と求まる。

(答) $(p, q) = (1, 1)$

(2)

(1)より, $b_{n+1} = nb_n$ が成り立つとき,

$$b_n = a_n + n + 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。また, $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= (n-1)b_{n-1} \\ &= (n-1)(n-2)b_{n-2} \\ &= \dots \\ &= (n-1)!b_1 \end{aligned}$$

である。上式に②を代入して,

$$\begin{aligned} a_n + n + 1 &= (n-1)!(a_1 + 1 + 1) \\ \Leftrightarrow a_n &= (n-1)!(a_1 + 2) - n - 1 \end{aligned}$$

と変形できる。以上より, $a_1 = \frac{1}{100}$ であるから,

$$a_n = \frac{201}{100}(n-1)! - n - 1$$

と求まる。

(答) $a_n = \frac{201}{100}(n-1)! - n - 1$

(3)

n は自然数であるから, (2)より, a_n が整数となるには

$$\frac{201}{100}(n-1)!$$

が整数となればよい。201 と 100 は互いに素であるから, $\frac{201}{100}(n-1)!$ が整数となるには,

$(n-1)!$ が 100 の倍数となればよい。したがって, $(n-1)!$ が 100 の倍数となるような最小の n を

求めればよい。

$$100 = 2^2 \cdot 5^2$$

であるが, $(n-1)!$ が初めて 5^2 を約数にもつのは, $n=11$ のときである。このとき, $(n-1)!$ は 2^2 も約数に持つので, $(n-1)!$ が初めて 100 の倍数となるのは $n=11$ のときである。以上より, 求める n は,

$$n=11$$

である。

(答) $n=11$

〔Ⅲ〕

〔解答〕

① $-\frac{4}{3}$

② $-\frac{4}{3}x+\frac{25}{3}$

③ $(7, -1)$

④ $(1, 7)$

⑤ -1

⑥ -7

※⑤, ⑥は順不同

〔解説〕

$P(4, 3)$ であるから,

$$OP: y = \frac{3}{4}x$$

である。したがって、点 P を通り、直線 OP に垂直な直線の傾きは $-\frac{4}{3}$ である。よって、直線

AB の方程式は,

$$\begin{aligned} AB: y &= -\frac{4}{3}(x-4)+3 \\ &= -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

と表せる。①と円 C の交点 A, B は、①を $x^2 + y^2 = 50$ に代入して,

$$\begin{aligned} x^2 + \left(-\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}\right)^2 &= 50 \\ \Leftrightarrow 25x^2 - 200x + 175 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x-7) &= 0 \\ \therefore x &= 1, 7 \end{aligned}$$

となるので,

$$A(7, -1), B(1, 7)$$

と求まる。円 C 上の点 D をとり、 AB と D の距離を h とすると,

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(7-1)^2 + (-1-7)^2} \\ &= 10 \end{aligned}$$

であり、 $\triangle ABD$ の面積が 50 であるから,

$$\begin{aligned} 10 \cdot h \cdot \frac{1}{2} &= 50 \\ \therefore h &= 10 \end{aligned}$$

と求まる。したがって、点 D を通り、直線 AB に平行な直線を m とすると、直線 m と点 P の距離が 10 となればよい。

$$AB: 4x + 3y - 25 = 0$$

であるから、直線 m は実数 p を用いて,

$$m: 4x + 3y + p = 0$$

と表せる。直線 m は円 C と交点を持つので、点と直線の距離の公式より,

$$\begin{aligned} \frac{|4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + p|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} &\leq 5\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow |p| &\leq 25\sqrt{2} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

が必要である。よって、直線 m と点 P の距離は 10 であるから、点と直線の距離の公式より,

$$\begin{aligned} \frac{|4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + p|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} &= 10 \\ \Leftrightarrow |p + 25| &= 50 \\ \therefore p &= 25 \quad (\because \textcircled{2}) \end{aligned}$$

と求まる。したがって、直線 m の方程式は,

$$\begin{aligned} 4x + 3y + 25 &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{4}{3}x - \frac{25}{3} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{3}$$

である。点 D は直線 m と円 C の交点であるから、点 D の x 座標は、③を $x^2 + y^2 = 50$ に代入して,

$$\begin{aligned} x^2 + \left(-\frac{4}{3}x - \frac{25}{3}\right)^2 &= 50 \\ \Leftrightarrow 25x^2 + 200x + 175 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)(x+7) &= 0 \\ \therefore x &= -1, -7 \end{aligned}$$

と求まる。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

- ① $\frac{1}{2}$
- ② $\frac{3}{8}$
- ③ $\frac{11}{32}$
- ④ $\frac{3}{16}$
- ⑤ $\frac{5}{8}$

〔解説〕

(1)

全事象は、

$$2^2=4 \text{ [通り]}$$

である。2回投げた後に点 A が原点にあるのは、表と裏が 1 回ずつ出ればよいので、

$${}_2C_1=2 \text{ [通り]}$$

である。したがって、硬貨を 2 回投げた結果、点 A が原点にある確率は、

$$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

である。

(2)

全事象は、

$$2^4=16 \text{ [通り]}$$

である。4 回投げた後に点 A が原点にあるのは、表と裏が 2 回ずつ出ればよいので、

$${}_4C_2=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}=6 \text{ [通り]}$$

である。したがって、硬貨を 2 回投げた結果、点 A が原点にある確率は、

$$\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

である。

(3)

全事象は、

$$2^6=64 \text{ [通り]}$$

である。6 回投げた後に点 A が原点にあるのは、表と裏が 3 回ずつ出ればよいので、

$${}_6C_3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20 \text{ [通り]}$$

であり、その確率は

$$\frac{20}{2^6}=\frac{5}{16}$$

となる。対称性より、点 A の座標が 1 以上となっている確率と、-1 以下になっている確率は等しいので、求める確率は

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{5}{16}\right)=\frac{11}{32}$$

である。

(4)

点 A が 2 回投げ終わった後に原点にあつて、6 回投げ終わった後にも原点にあればよいので、

(1), (2)より、求める確率は、

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}=\frac{3}{16}$$

と求まる。

(5)

「点 A が 2 回投げ終わった後に原点にある」ことを事象 A とし、「点 A が 6 回投げ終わった後に原点にある」ことを事象 B とする。 B となる確率 $P(B)$ は、(3)より

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{20}{64} \\ &= \frac{5}{16} \end{aligned} \qquad \cdots \textcircled{1}$$

である。また、

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \qquad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。(1), (4)より、

$$P(A)=\frac{1}{2} \qquad \cdots \textcircled{3}$$

$$P(A\cap B)=\frac{3}{16} \qquad \cdots \textcircled{4}$$

であるから、求める確率 $P(A\cup B)$ は、②に①、③、④を代入して、

$$\begin{aligned} P(A\cup B) &= \frac{1}{2} + \frac{5}{16} - \frac{3}{16} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

である。