

【Ⅰ】

【解答】

$$(1) \quad \textcircled{1} \quad 0 \quad \textcircled{2} \quad \frac{4}{5}$$

$$(2) \quad \textcircled{3} \quad -\frac{\sqrt{5}}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$(3) \quad \textcircled{4} \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \textcircled{5} \quad \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \textcircled{6} \quad 4\sqrt{5}-5$$

【解説】

(1)

円と直線の方程式から  $y$  を消去すると、交点の  $x$  座標は

$$x^2 + \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{4}x^2 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{4}x \left(x - \frac{4}{5}\right) = 0$$

$$\therefore x = \frac{4}{5}, 0$$

となる。

(2)

円と直線の方程式から  $y$  を消去すると

$$x^2 + \left(-\frac{1}{2}x + a\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{4}x^2 - ax + a^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 4ax + 4a^2 - 4 = 0$$

となる。円  $x^2 + y^2 = 1$  と直線  $y = -\frac{1}{2}x + a$  が共有点を持つための条件はこの 2 次方程式が実数

解を持つことである。したがって、判別式を  $D$  とすると求める  $a$  の値の範囲は、

$$\frac{D}{4} = 4a^2 - 5(4a^2 - 4) = 20 - 16a^2 \geq 0$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{5}}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$$

となる。

(3)

$P(\cos \theta, \sin \theta) (0 \leq \theta < 2\pi)$  と置く。このとき点  $P$  と直線

$$y = -\frac{1}{2}x + 2 \Leftrightarrow x + 2y - 4 = 0$$

の距離を  $d(\theta)$  とすると

$$d(\theta) = \frac{|2\sin \theta + \cos \theta - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}}$$

となり、 $2\sin \theta + \cos \theta \leq 3$  より

$$\begin{aligned} d(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{5}}(4 - 2\sin \theta - \cos \theta) \\ &= \frac{4\sqrt{5}}{5} - \cos(\theta - \phi) \end{aligned}$$

となる。ここで  $\phi$  は

$$\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin \phi = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

を満たす実数である。したがって  $d(\theta)$  は  $\theta = \phi$  のとき最小値

$$\frac{4\sqrt{5}-5}{5}$$

をとる。また、このとき点  $P$  の座標は  $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$  である。

## 〔Ⅱ〕

### 〔解答〕

- (1) ①  $2$       ②  $(t-2s)2^{n-1}$   
 (2) ③  $3 \cdot 2^{n-1}$   
 (3) ④  $2s$   
 (4) ⑤  $2^n$       ⑥  $n+2$       ⑦  $(n+2) \cdot 2^{n-1}$

### 〔解説〕

(1)

与えられた漸化式より

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 4a_{n+1} - 4a_n \\ \Leftrightarrow a_{n+2} - 2a_{n+1} &= 2(a_{n+1} - 2a_n) \end{aligned}$$

となる。したがって  $b_n = a_{n+1} - 2a_n$  より

$$b_{n+1} = 2b_n$$

となる。また

$$\begin{aligned} b_1 &= a_2 - 2a_1 \\ &= t - 2s \end{aligned}$$

である。したがって数列  $\{b_n\}$  は初項  $t-2s$ 、公比  $2$  の等比数列であるので

$$b_n = (t-2s)2^{n-1}$$

となる。

(2)

(1)の結果より  $s=3, t=6$  のとき

$$\begin{aligned} b_n &= 0 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &= 2a_n \end{aligned}$$

となる。よって  $a_1 = s = 3$  より数列  $\{a_n\}$  は初項  $3$ 、公比  $2$  の等比数列であるので

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

となる。

(3)

(2)と同様に考えると

$$\begin{aligned} b_n &= (t-2s)2^{n-1} \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &= 2a_n + (t-2s)2^{n-1} \end{aligned}$$

となる。数列  $\{a_n\}$  が等比数列であるとき

$$\begin{aligned} a_2^2 &= a_1 a_3 \\ \Leftrightarrow t^2 &= s(4t-4s) \\ \Leftrightarrow (t-2s)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= 2s \end{aligned}$$

である。逆に  $t=2s$  であるとき

$$a_{n+1} = 2a_n$$

となる。したがって求める条件は

$$t = 2s$$

である。

(4)

(1)の結果よりこのとき

$$b_n = 2^n$$

である。これに  $b_n = a_{n+1} - 2a_n$  を代入して両辺を  $2^n$  で割ると

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 2a_n &= 2^n \\ \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{2^n} &= \frac{a_n}{2^{n-1}} + 1 \end{aligned}$$

となる。したがって  $c_n = \frac{a_n}{2^{n-1}}$  を代入すると

$$c_{n+1} = c_n + 1$$

となる。よって数列  $\{c_n\}$  は初項  $c_1 = a_1 = 3$ 、公差  $1$  の等差数列であるので

$$\begin{aligned} c_n &= 3 + (n-1) \\ &= n+2 \end{aligned}$$

となる。したがって  $c_n = \frac{a_n}{2^{n-1}}$  より

$$a_n = (n+2) \cdot 2^{n-1}$$

となる。

### 〔Ⅲ〕

(1)

三角形が成立するための条件は1辺の長さが他の2辺の長さの和よりも小さいことである。  
したがって

$$AB+BC>CA$$

$$\Leftrightarrow x+1+3x-3>6$$

$$\Leftrightarrow x>2$$

$$AB+CA>BC$$

$$\Leftrightarrow x+1+6>3x-3$$

$$\Leftrightarrow 5>x$$

$$BC+CA>AB$$

$$\Leftrightarrow 3x-3+6>x+1$$

$$\Leftrightarrow x>-1$$

となる。したがって共通部分を求めると、求める $x$ の値の範囲は

$$2<x<5$$

となる。

(答)  $2<x<5$

(2)

$\triangle ABC$ において余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{(x+1)^2 + 6^2 - (3x-3)^2}{2 \cdot (x+1) \cdot 6} \\ &= -\frac{2x^2 - 5x - 7}{3(x+1)}\end{aligned}$$

となる。したがって $\cos A = -\frac{1}{3}$ のとき、

$$2x^2 - 5x - 7 = x + 1$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x+1) = 0$$

となる。(1)より $2<x<5$ であるので、 $x=4$ となる。このとき $AB=5$ 、 $AC=6$ である。また、

$\cos A = -\frac{1}{3}$ より

$$\begin{aligned}\sin A &= \sqrt{1 - \frac{1}{9}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

である。したがって $\triangle ABC$ の面積を $S$ とすると、

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ &= 10\sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。

(答)  $x=4$ 、 $10\sqrt{2}$