

〔I〕

(1)

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}|^2 &= |\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}|^2 \\ &= |\overrightarrow{b}|^2 - 2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + |\overrightarrow{a}|^2 \end{aligned}$$

であるから、 $AB=5$, $|\overrightarrow{a}|=5$, $|\overrightarrow{b}|=\sqrt{10}$ を代入して、

$$25 = 25 - 2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + 10$$

$$\therefore \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 5$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 5$$

(2)

$$\overrightarrow{CD} = s\overrightarrow{a},$$

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$$

となるので、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MD} &= \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CM} \\ &= \left(s - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{a} - \frac{1}{2}\overrightarrow{b} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{MD} = \left(s - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{a} - \frac{1}{2}\overrightarrow{b}$$

(3)

$\overrightarrow{MD} \perp \overrightarrow{CA}$ より、

$$\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(s - \frac{1}{2}\right) \cdot 25 - \frac{1}{2} \cdot 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{3}{5}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad s = \frac{3}{5}$$

〔Ⅱ〕

- (1) ① $-2 < x < 1$
 (2) ② $x^3 - 3x + 2$
 ③ -1
 ④ 4
 ⑤ 1
 ⑥ 0
 (3) ⑦ 1

〔解説〕

(1)

真数条件より、 $f(x)$ の定義域は、

$$-2 < x < 1$$

である。

(2)

$$\begin{aligned} f(x) &= \log_4(x+2) + \frac{\log_4(1-x)}{\log_4 2} \\ &= \log_4(x+2) + \log_4(1-x)^2 \\ &= \log_4(x^3 - 3x + 2) \end{aligned}$$

となるので、

$$g(x) = x^3 - 3x + 2$$

である。また、

$$g'(x) = 3x^2 - 3$$

となるので、 $y = g(x)$ の増減表は下表のようになる。

x	...	-1	...	1	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	極大値	↘	極小値	↗

よって、 $x = -1$ のとき極大値

$$g(-1) = 4$$

をとり、 $x = 1$ のとき極小値

$$g(1) = 0$$

をとる。

(3)

対数の底は $4 > 1$ であるから、 $f(x)$ は $g(x)$ が最大るとき、最大になる。(2)より、 $-2 < x < 1$ における $g(x)$ の最大値は、 $g(-1) = 4$ であるから、 $f(x)$ の最大値は、

$$\log_4 4 = 1$$

である。

【Ⅲ】

- ① (2, 4)
- ② (6, 0)
- ③ $\frac{16}{3}$
- ④ $x-2$
- ⑤ $\frac{8}{3}$

【解説】

放物線 C と直線 l の方程式を連立すると、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x^2 + 3x &= -x + 6 \\ \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-6)(x-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 2, 6 \end{aligned}$$

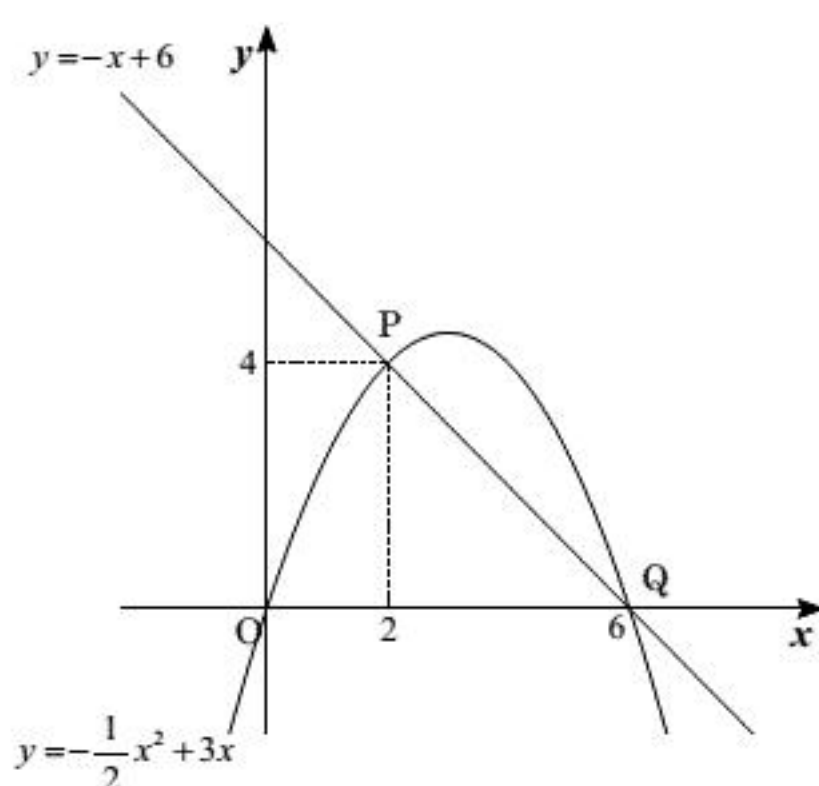
となるので、点 P の座標は、

$$(2, 4)$$

となり、点 Q の座標は、

$$(6, 0)$$

となる。また、 C と l を図示すると、 S は下図の斜線部になる。



よって、

$$\begin{aligned} S &= \int_2^6 \left\{ -\frac{1}{2}x^2 + 3x - (-x + 6) \right\} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_2^6 (x-2)(x-6) dx \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \left\{ -\frac{1}{6}(6-2)^3 \right\} \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

である。また、 R は PQ の垂直二等分線上にあるので、求める直線は実数 a を用いて、

$$y = x + a$$

とおける。この直線が PQ の中点 $(4, 2)$ を通るから、

$$a = -2$$

となるので、 R は

$$y = x - 2$$

上にある。 R の x 座標を b とすると、 $R(b, b-2)$ となる。ここで、 R と PQ の中点との距離 $h(b)$ は、

$$h(b) = \sqrt{(b-4)^2 + (b-4)^2} = \sqrt{2(b-4)^2}$$

となるが、 R は $y \leq -x + 6$ の表す領域内にあるので、

$$b \leq 4$$

である。よって、

$$h(b) = -\sqrt{2}(b-4)$$

となる。また、 P と Q の距離は、

$$\sqrt{(2-6)^2 + (4-0)^2} = 4\sqrt{2}$$

である。よって、 $\triangle PQR$ の面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot h(b) = -4(b-4)$$

であり、これが $S = \frac{16}{3}$ に一致するとき、

$$-4(b-4) = \frac{16}{3} \quad \therefore b = \frac{8}{3}$$

となる。これが、求める R の x 座標である。