

# 〔I〕

(1)

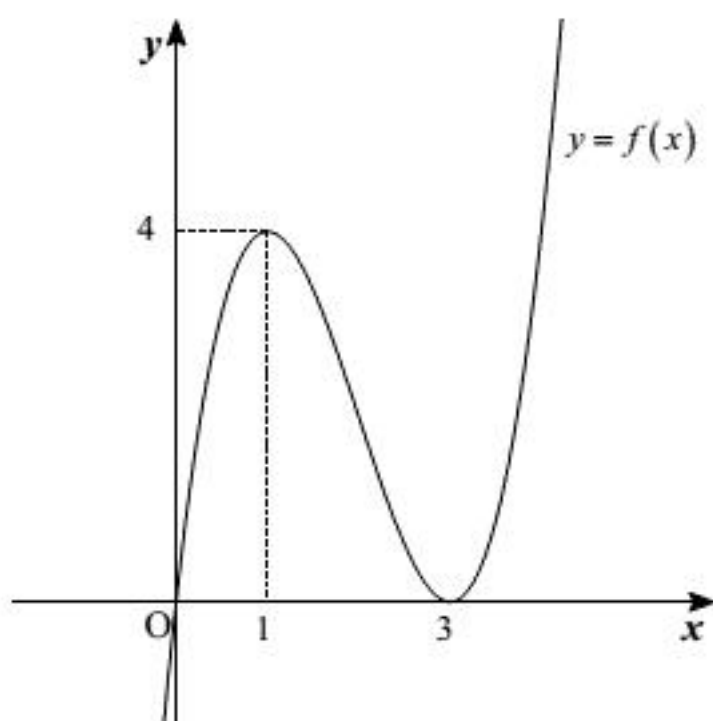
$f(x)$  を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12x + 9 \\ &= 3(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

となる。よって  $f(x)$  の増減表は下のようになる。

|         |            |   |            |   |            |
|---------|------------|---|------------|---|------------|
| $x$     | $\cdots$   | 1 | $\cdots$   | 3 | $\cdots$   |
| $f'(x)$ | +          | 0 | -          | 0 | +          |
| $f(x)$  | $\nearrow$ | 4 | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ |

したがって  $y=f(x)$  のグラフは下図のようになる。



(答) 前図

(2)

直線  $y=ax$ ，曲線  $y=f(x)$  はともに原点を通る。原点における曲線  $y=f(x)$  の接線の方程式は， $f'(0)=9$  より  $y=9x$  である。また点  $(3,0)$  における曲線  $y=f(x)$  の接線の方程式は  $y=0$  である。したがって，直線  $y=ax$  と曲線  $y=f(x)$  が  $x>0$  において異なる 2 つの共有点をもつときの  $a$  の範囲は，(1) のグラフより

$$0 < a < 9$$

とわかる。

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 9x &= ax \\ \Leftrightarrow x\{x^2 - 6x + (9-a)\} &= 0 \end{aligned}$$

となることから， $x=\alpha, \beta$  は  $x^2-6x+(9-a)=0$  の解であり，解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = 6, \alpha\beta = 9-a$$

が成り立つ。ここで  $\beta=2\alpha$  のときを考えると， $\alpha=2, \beta=4, a=1$  と求まる。

(答)  $0 < a < 9, a=1$

(3)

求める面積の和を  $S$  とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{f(x) - x\} dx + \int_2^4 \{x - f(x)\} dx \\ &= \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx - \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx \\ &= \left[ \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 \right]_0^2 - \left[ \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 \right]_2^4 \\ &= 8 \end{aligned}$$

と計算できる。

(答) 8

〔Ⅱ〕

- ①  $2(n+1)$                       ②  $n(n+1)$     ③  $\frac{n}{2}$     ④  $\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)$
- ⑤  $\frac{1}{48}n(n+1)(n+2)(n+3)$     ⑥  $3n(n+3)$     ⑦  $3$

〔解説〕

$f_n(x) = \sum_{k=0}^n (x-k)^2$  を微分すると

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \sum_{k=0}^n 2(x-k) \\ &= 2(n+1)x - n(n+1) \\ &= 2(n+1)\left(x - \frac{n}{2}\right) \end{aligned}$$

となる。したがって  $f_n(x)$  の増減表は下のようになる。

|           |            |               |            |
|-----------|------------|---------------|------------|
| $x$       | ...        | $\frac{n}{2}$ | ...        |
| $f'_n(x)$ | -          | 0             | +          |
| $f_n(x)$  | $\searrow$ |               | $\nearrow$ |

$f_n(x)$  は  $x = \frac{n}{2}$  のとき最小値をとるので

$$\begin{aligned} a_n &= f_n\left(\frac{n}{2}\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{n}{2} - k\right)^2 \\ &= \sum_{k=0}^n \left(k^2 - nk + \frac{n^2}{4}\right) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - n \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + \frac{n^2}{4}(n+1) \\ &= \frac{1}{12}n(n+1)\{2(2n+1) - 3n\} \\ &= \frac{1}{12}n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

である。これより

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{12}k(k+1)(k+2) \\ &= \frac{1}{12} \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} \{k(k+1)(k+2)(k+3) - (k-1)k(k+1)(k+2)\} \\ &= \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3) \\ &= \frac{1}{48} n(n+1)(n+2)(n+3) \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} &= \sum_{k=1}^n \frac{12}{k(k+1)(k+2)} \\ &= 12 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right\} \\ &= 6 \left\{ \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\} \\ &= \frac{3n(n+3)}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} 6 \left\{ \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\} \\ &= 3 \end{aligned}$$

である。

### 〔Ⅲ〕

(1)

条件(i), (ii)より  $B_1\left(a, \frac{1}{a}\right)$  である。 $f(x) = \frac{1}{x}$  とすると  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$  となるから、 $y = f(x)$  の

点  $B_1\left(a, \frac{1}{a}\right)$  における接線の方程式は

$$y = -\frac{1}{a^2}(x-a) + \frac{1}{a}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$$

(2)

条件(iii)より  $B_n\left(b_n, \frac{1}{b_n}\right)$  と置ける。このとき(1)の結果より点  $B_n\left(b_n, \frac{1}{b_n}\right)$  における接線の方程式は

$$y = -\frac{1}{b_n^2}x + \frac{2}{b_n}$$

である。条件(ii), (iv)よりこの直線と  $x$  軸の交点の  $x$  座標が  $b_{n+1}$  に等しいので

$$0 = -\frac{1}{b_n^2}b_{n+1} + \frac{2}{b_n}$$

$$\therefore b_{n+1} = 2b_n$$

である。ここで、 $b_1 = a$  であることを考えると  $b_n = a \cdot 2^{n-1}$  とわかり、

$$A_n(a \cdot 2^{n-1}, 0), B_n\left(a \cdot 2^{n-1}, \frac{1}{a \cdot 2^{n-1}}\right)$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad A_n(a \cdot 2^{n-1}, 0), B_n\left(a \cdot 2^{n-1}, \frac{1}{a \cdot 2^{n-1}}\right)$$

(3)

題意の立体は底面の半径が  $A_nB_n = \frac{1}{b_n}$ 、高さが  $A_nA_{n+1} = b_n$  の円錐である。したがって

$$V_n = \frac{1}{3} \cdot \pi \left( \frac{1}{b_n} \right)^2 \cdot b_n$$

$$= \frac{\pi}{3b_n}$$

$$= \frac{\pi}{3a \cdot 2^{n-1}}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad V_n = \frac{\pi}{3a \cdot 2^{n-1}}$$

(4)

(3)の結果より、 $V_n$  は初項  $\frac{\pi}{3a}$ 、公比  $\frac{1}{2}$  の等比数列であるので

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \frac{\frac{\pi}{3a}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2\pi}{3a}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} V_n = \frac{2\pi}{3a}$$

# 【Ⅳ】

$$(1) \quad \textcircled{1} \quad 1 < x < \frac{3}{2} \quad (2) \quad \textcircled{2} \quad \sqrt{2} \quad \textcircled{3} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(3) \quad \textcircled{4} \quad \frac{4}{7} \quad (4) \quad \textcircled{5} \quad \frac{3^n + (-1)^n}{2}$$

## 【解説】

(1)

真数条件より

$$2-x > 0 \text{ かつ } x-1 > 0$$

$$\therefore 1 < x < 2$$

である。この範囲のもとで、与えられた不等式を変形していくと

$$\log_2(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(2-x) < 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-1) - \log_2(2-x) < 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-1) < \log_2(2-x)$$

$$\Leftrightarrow x-1 < 2-x$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$$

となる。よって、求める範囲は

$$1 < x < \frac{3}{2}$$

である。

(2)

2倍角の公式を用いると、与えられた関数は

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \tan \theta + \frac{1}{\tan 2\theta} &= \frac{3}{4} \tan \theta + \frac{1 - \tan^2 \theta}{2 \tan \theta} \\ &= \frac{\tan \theta}{4} + \frac{1}{2 \tan \theta} \end{aligned}$$

と変形できる。ここで  $t = \tan \theta$  とおくと、 $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$  から  $t > 1$  とわかり、

$$\frac{3}{4} \tan \theta + \frac{1}{\tan 2\theta} = \frac{t}{4} + \frac{1}{2t}$$

となる。 $\frac{t}{4} > 0, \frac{1}{2t} > 0$  であるから、相加相乗平均の関係より

$$\frac{t}{4} + \frac{1}{2t} \geq 2 \sqrt{\frac{t}{4} \cdot \frac{1}{2t}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

である。等号成立は

$$\frac{t}{4} = \frac{1}{2t}$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 2$$

$$\therefore t = \sqrt{2} \quad (\because t > 1)$$

のときだから、与えられた関数は  $\tan \theta = \sqrt{2}$  のとき最小値  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  をとる。

(3)

与えられた等式を変形すると

$$4\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{BQ} + 2\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AQ} + (\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AB}) + 2(\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{0}$$

$$\therefore \overrightarrow{AQ} = \frac{3}{7} \cdot \frac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{3}$$

となる。一方点 P が線分 BC を 2:1 に内分することから

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{3}$$

である。したがって

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{7} \overrightarrow{AP}$$

である。点 Q は線分 AP を  $(1-t):t$  に内分するので

$$1-t = \frac{3}{7}$$

$$\therefore t = \frac{4}{7}$$

と求まる。

(4)

$k$  を  $A$  の固有値とすると

$$|A - kE| = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 2 & 1-k \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (k+1)(k-3) = 0$$

$$\therefore k = -1, 3$$

とわかり、固有ベクトルは

$$k = -1 \text{ のとき } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$k = 3 \text{ のとき } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。ここで、 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  とおくと

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

となるので

$$(P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n \Leftrightarrow P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

が成り立つ。以上のことから

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + (-1)^n & 3^n - (-1)^n \\ 3^n - (-1)^n & 3^n + (-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と求まるので、

$$a_n = \frac{3^n + (-1)^n}{2}$$

である。