

2013 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(HB)〈シャープペンシルは、HB 0.5 mm以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し、切取線から切り離してください。
4. 試験時間は 100 分です。
5. 問題は 4 ページで大問 4 問です。余白は計算用紙です。
6. 解答用紙は両面になっています。

〔Ⅰ〕 関数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) $y = f(x)$ のグラフの概形を解答用紙の ① の欄にかけ。

(2) a を定数とする。直線 $y = ax$ と曲線 $y = f(x)$ が、 $x > 0$ において異なる 2 つの共有点をもつときの a の範囲を求めよ。また、そのときの共有点の x 座標を α, β ($0 < \alpha < \beta$) とするとき、 $\beta = 2\alpha$ となるように a の値を定めよ。

(3) a は (2) において $\beta = 2\alpha$ となるように定めた値とする。このとき、直線 $y = ax$ と曲線 $y = f(x)$ で囲まれる 2 つの図形の面積の和を求めよ。

〔Ⅱ〕 n を自然数とする。 x の関数

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n (x-k)^2 = x^2 + (x-1)^2 + (x-2)^2 + \cdots + (x-n)^2$$

に対して、次の をうめよ。ただし、④、⑤、⑥の解答は因数分解した n の式で答えよ。

$f_n(x)$ の導関数 $f'_n(x)$ は、 x の 1 次関数

$$f'_n(x) = \text{①} x - \text{②}$$

である。これより $x = \text{③}$ のとき、 $f_n(x)$ は最小値 ④ をとる。この最小値を a_n とすると、

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \text{⑤}$$

である。また

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} = \frac{\text{⑥}}{(n+1)(n+2)}$$

だから、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ の和は、 ⑦ である。

〔Ⅲ〕 a を正の定数とする。自然数 n に対して、座標平面上の点 A_n , B_n を以下の

(i) ～ (iv) を満たすように定める。

(i) A_1 の座標は $(a, 0)$ である。

(ii) A_n と B_n の x 座標は等しい。

(iii) B_n は双曲線 $y = \frac{1}{x}$ 上の点である。

(iv) A_{n+1} は $y = \frac{1}{x}$ の B_n における接線と x 軸の交点である。

次の問いに答えよ。

(1) $y = \frac{1}{x}$ の B_1 における接線の方程式を求めよ。

(2) A_n , B_n の座標を求めよ。

(3) $\triangle A_n B_n A_{n+1}$ を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_n とおく。

V_n を求めよ。

(4) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ の和を求めよ。

〔IV〕 次の をうめよ。

(1) 不等式 $\log_2(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(2-x) < 0$ を解くと、 ① となる。

(2) $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で定義された関数 $\frac{3}{4}\tan\theta + \frac{1}{\tan 2\theta}$ は $\tan\theta =$ ②
のとき、最小値 ③ をとる。

(3) $\triangle ABC$ の辺 BC を $2:1$ に内分する点を P とし、線分 AP を
 $(1-t):t$ ($0 < t < 1$) に内分する点を Q とする。等式

$$4\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{BQ} + 2\overrightarrow{CQ} = \vec{0}$$

が成り立つとき、 t の値は ④ である。

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ とし、自然数 n に対して $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$ とおく。 a_n を n を
用いて表すと ⑤ である。

(以 上)