

〔 I 〕

〔解答〕

① -2

② 2

③ 29

④ 2

⑤ 10

⑥ $t^3 - 10t^2 + 29t - 20$

⑦ $(1, 4, 5)$

〔解説〕

$$\begin{aligned}(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 &= 26 \\ \Leftrightarrow -2(xy+yz+zx) + 2(x^2+y^2+z^2) &= 26\end{aligned}$$

であり、これに、 $x^2+y^2+z^2=42$ を代入して、

$$-2(xy+yz+zx) + 2 \cdot 42 = 26 \quad \therefore xy+yz+zx = 29$$

となる。また、

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2 &= x^2+y^2+z^2 + 2(xy+yz+zx) \\ &= 42 + 2 \cdot 29 \\ &= 100\end{aligned}$$

であり、 $x>0, y>0, z>0$ であることから、 $x+y+z=10$ となる。このとき、

$$\begin{aligned}(t-x)(t-y)(t-z) &= t^3 - (x+y+z)t^2 + (xy+yz+zx)t - xyz \\ &= t^3 - 10t^2 + 29t - 20\end{aligned}$$

となり、因数定理を用いて、

$$t^3 - 10t^2 + 29t - 20 = (t-1)(t-4)(t-5)$$

とできるので、 $x<y<z$ となる解は

$$(x, y, z) = (1, 4, 5)$$

である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

- (1) ① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ 4
- (2) ④ 16 ⑤ $2n$ ⑥ $\frac{4}{3}(4^n - 1)$ ⑦ $n = 13$

〔解説〕

(1)

余弦定理により、

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{(\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2 - (\sqrt{13})^2}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}} \\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

である。また、 $0 < A < \pi$ より $\sin A > 0$ であるから

$$\begin{aligned}\sin A &= \sqrt{1 - \cos^2 A} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} \\ &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

である。よって、 $\triangle ABC$ の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{4}{5} = 4$$

である。

(2)

自然数 n に対し、各辺の長さが $\triangle ABC$ の各辺の長さの 2^{n-1} 倍であるような三角形を T_n とすると、その面積が S_n である。 $\triangle ABC$ と T_n の相似比が $1:2^{n-1}$ であることから、面積比について

$$\begin{aligned}1^2 : (2^{n-1})^2 &= 4 : S_n \\ \therefore S_n &= 2^{2n}\end{aligned}$$

となる。したがって、 T_2 の面積は

$$S_2 = 16$$

となる。また、

$$\begin{aligned}\log_2 S_n &= \log_2 2^{2n} \\ &= 2n\end{aligned}$$

と表され、

$$\begin{aligned}S &= S_1 + S_2 + \cdots + S_n \\ &= \sum_{k=1}^n 2^{2k} \\ &= \sum_{k=1}^n 4^k \\ &= \frac{4(4^n - 1)}{4 - 1} \\ &= \frac{4}{3}(4^n - 1)\end{aligned}$$

と表される。よって、 $S > 2^{26}$ となるとき、

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}(4^n - 1) &> 2^{26} \\ \Leftrightarrow 4^n &> 3 \cdot 2^{24} + 1 \\ \Leftrightarrow 4^n &> 3 \cdot 4^{12} + 1\end{aligned}$$

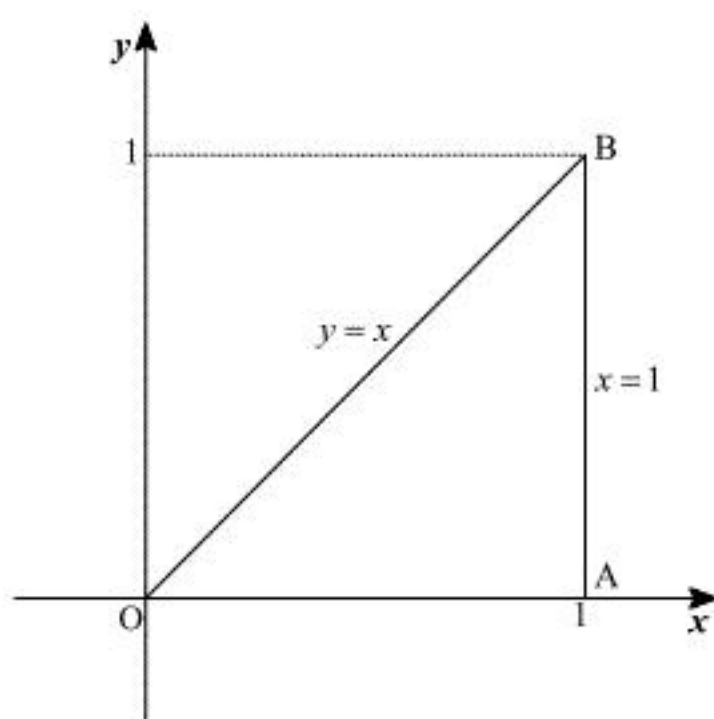
が成り立つ。この不等式の左辺は n について単調増加し、

$$\begin{aligned}4^{12} - (3 \cdot 4^{12} + 1) &= (-2) \cdot 4^{12} - 1 < 0, \\ 4^{13} - (3 \cdot 4^{12} + 1) &= 4^{12} - 1 > 0\end{aligned}$$

であるから、 $S > 2^{26}$ となる最小の自然数 n は、 $n = 13$ である。

〔Ⅲ〕

(1)



[1] P が OA 上を動くとき

このとき

$$y=0, 0 \leq x \leq 1$$

となるので

$$p=x, q=0, 0 \leq p \leq 1$$

$$\therefore q=0, 0 \leq p \leq 1$$

となる。

[2] P が AB 上を動くとき

このとき

$$x=1, 0 \leq y \leq 1$$

となるので

$$p=y+1, q=y, 1 \leq p \leq 2$$

$$\therefore q=p-1, 1 \leq p \leq 2$$

となる。

[3] P が BO 上を動くとき

このとき

$$y=x, 0 \leq x \leq 1$$

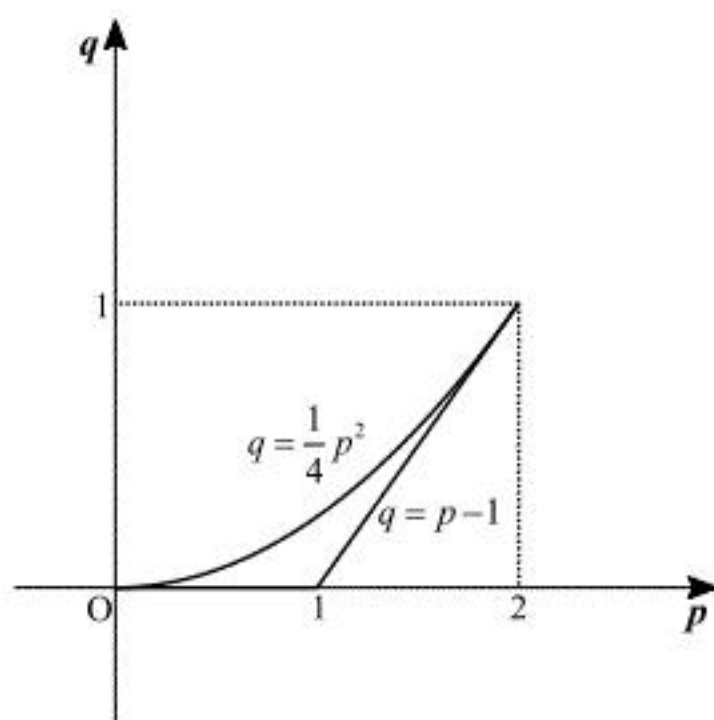
となるので

$$p=2x, q=x^2, 0 \leq p \leq 2$$

$$\therefore q=\frac{1}{4}p^2, 0 \leq p \leq 2$$

となる。

以上, [1], [2], [3]より求める軌跡は次図である。



(答) 前図

(2)

(1)の結果より, 求める面積は

$$\int_0^2 \frac{1}{4} p^2 dp - \int_1^2 (p-1) dp = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

となる。

(答) $\frac{1}{6}$