

【Ⅰ】

〔解答〕

- ① $x^2 - 2x + 3$
- ② 2
- ③ -4
- ④ $x^2 - 6x + 7$
- ⑤ $3 \pm \sqrt{2}$
- ⑥ 解なし

※⑥は採点対象外

〔解説〕

$f(x) = ax^2 + bx + c$ とおくと、点 $(1, 2)$ を通るから

$$a + b + c = 2 \qquad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、この点における接線の傾きが 0 より、 $f'(x) = 2ax + b$ であることに注意して

$$2a + b = 0 \qquad \dots \textcircled{2}$$

となる。点 $(3, f(3))$ における接線の傾きが 4 より

$$6a + b = 4 \qquad \dots \textcircled{3}$$

となる。①、②、③式を連立して解くと

$$a = 1, b = -2, c = 3$$

となり、

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

を得る。 $y = g(x)$ は放物線 $y = f(x)$ を x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動したものだから

ら、 $f(x) = x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2$ であることに注意して

$$\begin{aligned} y - q &= (x - p - 1)^2 + 2 \\ \Leftrightarrow y &= (x - p - 1)^2 + 2 + q \end{aligned}$$

となる。点 $(1, 2)$ を通るから

$$2 = p^2 + 2 + q \therefore q = -p^2 \qquad \dots \textcircled{4}$$

となり、点 $(4, f(4))$ における接線の傾きが 2 より、 $g'(x) = 2(x - p - 1)$ だから

$$\begin{aligned} 2(3 - p) &= 2 \\ \therefore p &= 2 \end{aligned}$$

となる。④式に代入して

$$q = -4$$

となり、

$$g(x) = (x - 3)^2 - 2 = x^2 - 6x + 7$$

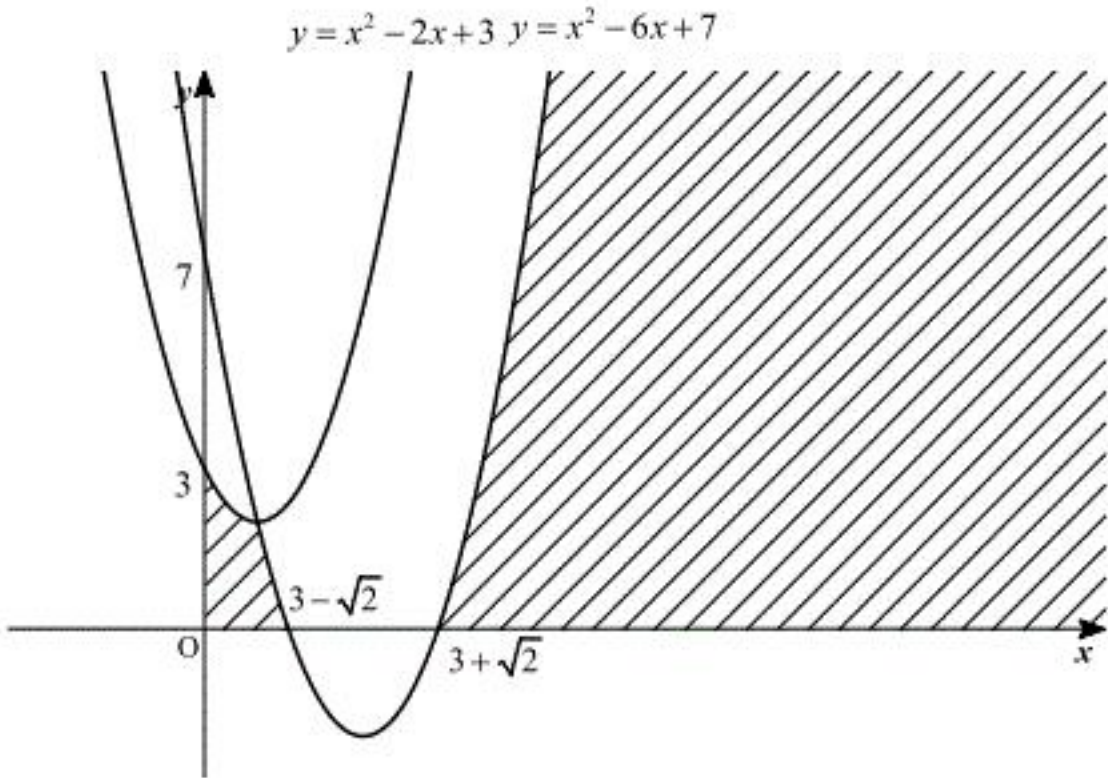
とわかる。放物線 $y = g(x)$ が x 軸と交わる 2 点の x 座標は

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 6x + 7 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 3 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。不等式

$$y \leq x^2 - 2x + 3, y \leq x^2 - 6x + 7, x \geq 0, y \geq 0$$

の表す領域を図示すると、下図のようになる。ただし、境界を含む。



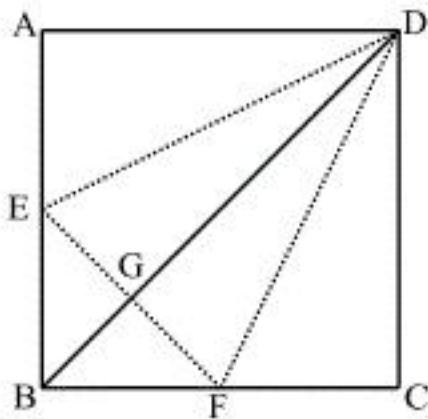
したがって、解はない。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

① $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ ② $3\sqrt{2}a$ ③ $3a^2$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ ⑤ $2a$ ⑥ $\frac{2}{3}a$ ⑦ $\frac{a^3}{3}$

〔解説〕



$BF=a$ であるので直角二等辺三角形の性質から

$$BG=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

となる。また、 $BD=\sqrt{2}a$ であるので

$$DG=BD-BG=\frac{3\sqrt{2}}{2}a$$

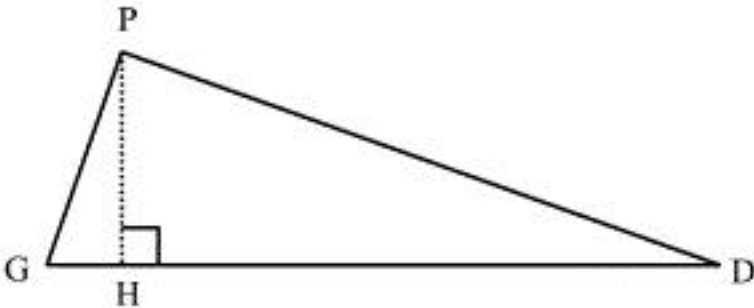
となる。 $BF=a$ より、

$$EF=\sqrt{2}a$$

であるので

$$\triangle DEF=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}a\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}a=\frac{3}{2}a^2$$

となる。



次に $\triangle PGD$ について考える。正方形 $ABCD$ が四面体 $PDEF$ の展開図であることを考えると

$$PG=BG=\frac{\sqrt{2}}{2}a, PD=CD=2a$$

となる。ここで $GD=\frac{3\sqrt{2}}{2}a$ であることから

$$s=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{3\sqrt{2}}{2}a+2a}{2}=(\sqrt{2}+1)a$$

とおくと、ヘロンの公式より

$$\triangle PGD=\sqrt{s\left(s-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)\left(s-\frac{3\sqrt{2}}{2}a\right)(s-2a)}=\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$$

となる。また

$$\triangle PGD=\frac{1}{2}\cdot GD\cdot PH$$

であるので、 $GD=\frac{3\sqrt{2}}{2}a$ より

$$DH=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a^2}{\frac{3\sqrt{2}}{2}a}\cdot 2=\frac{2}{3}a$$

となる。よって

$$V=\frac{3}{2}a^2\cdot\frac{2}{3}a\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}a^3$$

となる。

〔Ⅲ〕

(1)

a_2, a_3, a_4 を計算すると,

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2} \cos 0 - \frac{1}{2} \sin 0 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{1}{2} \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{2} \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。よって $n \geq 2$ のとき

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2}$$

であると推測できる。

$$(\text{答}) \quad a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = -\frac{1}{2}, a_4 = \frac{1}{2}, a_n = \frac{(-1)^n}{2} \quad (n \geq 2)$$

(2)

まず, 数学的帰納法を用いて(1)での推測が正しいことを示す。すなわち, $n \geq 2$ のとき,

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つことを示す。

[1] $n=2$ のとき

(1)の結果より, このとき①は成立する。

[2] $n=k$ で①が成立しているとき

このとき, 仮定より,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{1}{2} \cos \left\{ \frac{(-1)^k}{2} \cdot \pi \right\} - \frac{1}{2} \sin \left\{ \frac{(-1)^k}{2} \cdot \pi \right\} \\ &= \frac{1}{2} \cos \left\{ (-1)^k \cdot \frac{\pi}{2} \right\} - \frac{1}{2} \sin \left\{ (-1)^k \cdot \frac{\pi}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot (-1)^k \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{2} \end{aligned}$$

となるから, $n=k+1$ のときも①は成立する。

以上, [1], [2]より, $n \geq 2$ を満たす任意の自然数 n について①は成立し, (1)の推測が正しいことが示された。

よって,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (a_k)^{2k} \\ &= 0 + \sum_{k=2}^n \left\{ \frac{(-1)^k}{2} \right\}^{2k} \\ &= \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{4} \right)^k \\ &= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^{n-2} \\ &= \frac{\frac{1}{16} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \right\}}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{12} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \right\} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_n = \frac{1}{12} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \right\}$$