

【Ⅰ】

【解答】

(1) ① $3x^2+10x+3$

(2) ② -3 ③ 0 ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{256}{27}$

(3) ⑥ $-\frac{256}{27} < k < 0$

【解説】

(1)

$$f'(x) = 3x^2 + 10x + 3$$

となる。

(2)

(1)の結果より、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 10x + 3 \\ &= 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x + 3) \end{aligned}$$

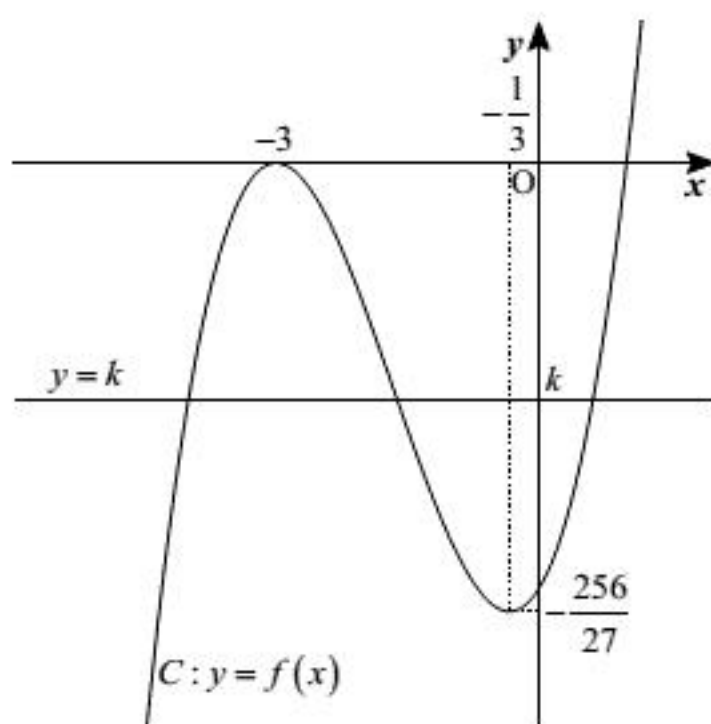
であるから、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	...	-3	...	$-\frac{1}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大 0	↘	極小 $-\frac{256}{27}$	↗

よって $f(x)$ は $x = -3$ で極大値 0 をとり、 $x = -\frac{1}{3}$ で極小値 $-\frac{256}{27}$ をとる。

(3)

(2)の結果より、 $y = f(x)$ のグラフは次図のようになる。



よって前図より、直線 $y = k$ と曲線 C が異なる3点で交わるときの k の範囲は

$$-\frac{256}{27} < k < 0$$

である。

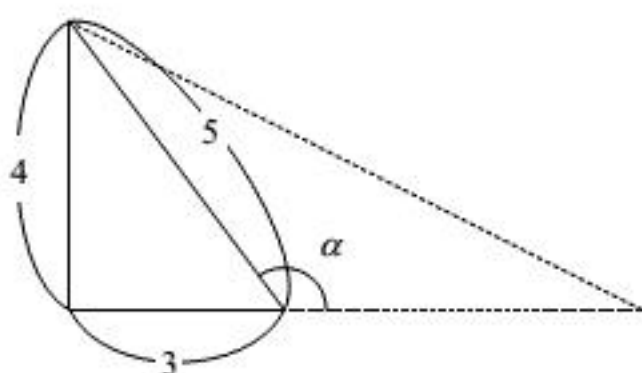
〔Ⅱ〕

〔解答〕

$$\textcircled{1} \quad \frac{4}{5} \quad \textcircled{2} \quad -\frac{3}{5} \quad \textcircled{3} \quad \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \textcircled{5} \quad 4 \quad \textcircled{6} \quad 2$$

〔解説〕



上図より

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

がわかる。また、半角公式を用いて

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$= \frac{4}{5},$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$= \frac{1}{5}$$

が得られるが、ここで $0 < \alpha < \pi$ より $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ なので

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5} (> 0),$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5} (> 0)$$

となる。関数 $f(x) = a \sin x + b \cos x$ を合成すると

$$f(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \beta)$$

と表せる。ここで β は $\cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ を満たす。条件より、 $x = \frac{\alpha}{2}$ で最大値

$2\sqrt{5}$ をとるので

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right) = 1 \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{5} \end{cases}$$

を満たす。 $\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right) = 1$ を満たす β として、 $\beta = \frac{\alpha}{2}$ がとれる。よって

$$\cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{b}{2\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow b = 2,$$

$$\sin \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{a}{2\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow a = 4$$

と求まる。

【Ⅲ】

(1)

条件より,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= 3\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OP} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OR} &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

であるから, $R(-1, -3)$ と求まる。

(答) $R(-1, -3)$

(2)

$$\overrightarrow{OQ_{n+1}} = 3\overrightarrow{OQ_n} + \overrightarrow{OP} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\overrightarrow{OR} = 3\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OP} \quad \dots \textcircled{2}$$

であるから, ①-②より,

$$\overrightarrow{RQ_{n+1}} = 3\overrightarrow{RQ_n}$$

が成り立つ。

(答) $\overrightarrow{RQ_{n+1}} = 3\overrightarrow{RQ_n}$

(3)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RQ_1} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \\ \overrightarrow{RO} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

であるから,

$$|\overrightarrow{RQ_1}| = \sqrt{29}, |\overrightarrow{RO}| = \sqrt{10}, \overrightarrow{RQ_1} \cdot \overrightarrow{RO} = 17$$

である。よって, $\overrightarrow{RO}$ と $\overrightarrow{RQ_1}$ のなす角を $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ とすると,

$$\cos \theta = \frac{17}{\sqrt{290}}$$

と求まる。このとき, $\sin \theta > 0$ であるから,

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{\frac{290 - 289}{290}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{290}}\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{290}}$

(4)

(2)より,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RQ_n} &= 3^{n-1}\overrightarrow{RQ_1} \\ &= 3^{n-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。 $\overrightarrow{RQ_n} = 3^{n-1}\overrightarrow{RQ_1}$ より, $\overrightarrow{RQ_n}$ と $\overrightarrow{RQ_1}$ は平行である。よって, $\overrightarrow{RO}$ と $\overrightarrow{RQ_n}$ のなす角も θ であるから, 三角形 ORQ_n の面積を S_n とおくと,

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1} \cdot \sqrt{29} \cdot \sqrt{10} \cdot \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1} \cdot \sqrt{290} \cdot \frac{1}{\sqrt{290}} \\ &= \frac{3^{n-1}}{2}\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{3^{n-1}}{2}$