

〔 I 〕

(1)

$f(x) = x^p + p - 1 - px$ とおくと、 $f'(x) = p(x^{p-1} - 1)$ で、

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^{p-1} = 1 \quad (\because p \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad (\because x > 0, p - 1 \neq 0)$$

となる。よって、 $x > 0$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	(0)	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

したがって、 $x > 0$ における $f(x)$ の最小値は $f(1) = 0$ であるから、 $x > 0$ のとき

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^p + p - 1 \geq px$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

a を変数、 b を定数として考え、 $g(a) = a^p + (p-1)b^{\frac{p}{p-1}} - pab$ とおくと、 $g'(a) = p(a^{p-1} - b)$ で、

$$g'(a) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^{p-1} = b \quad (\because p \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow a = b^{\frac{1}{p-1}} \quad (\because a > 0, b > 0, p - 1 \neq 0)$$

となる。よって、 $a > 0$ における $g(a)$ の増減表は次のようになる。

a	(0)	...	$b^{\frac{1}{p-1}}$	...
$g'(a)$		-	0	+
$g(a)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

したがって、 $a > 0$ における $g(a)$ の最小値は $g\left(b^{\frac{1}{p-1}}\right) = 0$ であるから、 $a > 0, b > 0$ のとき

$$g(a) \geq 0 \Leftrightarrow a^p + (p-1)b^{\frac{p}{p-1}} \geq pab$$

が成り立つ。

(証明終)

(3)

(2) の増減表より、 $g(a) = 0 \Leftrightarrow a^p + (p-1)b^{\frac{p}{p-1}} = pab$ となるのは、 $a = b^{\frac{1}{p-1}}$ のときである。これに $p = 3$ を代入して、求める a は $a = \sqrt{b}$ となる。

(答) $a = \sqrt{b}$

〔Ⅱ〕

〔解答〕

- (1) ① $z+a^2$ ② a^4
 (2) ③ $a \geq 1$
 (3) ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $z+2$ ⑥ 4
 ⑦ $\frac{32}{3}\pi$ ⑧ $16-10\sqrt{2}$

〔解説〕

題意の球面を S とおく。

(1)

S は xy 平面に接しているので、その半径は $|-a^2|=a^2$ である。したがって、 S の方程式は

$$(x-1)^2+(y-a)^2+(z+a^2)^2=a^4 \qquad \cdots \textcircled{1}$$

である。

(2)

S の方程式①と xz 平面の方程式 $y=0$ を連立して、

$$(x-1)^2+(z+a^2)^2=a^2(a^2-1) \qquad \cdots \textcircled{2}$$

を得る。

$$\begin{aligned} S \text{ が } xz \text{ 平面と共有点をもつ} \\ \Leftrightarrow \text{方程式②を満たす } (x, z) \text{ が存在する} \\ \Leftrightarrow a^2(a^2-1) \geq 0 \\ \Leftrightarrow a^2-1 \geq 0 \qquad (\because a^2 > 0) \\ \Leftrightarrow a \geq 1 \qquad (\because a > 0) \end{aligned}$$

より、求める条件は $a \geq 1$ である。

(3)

S と xz 平面の共有点の全体が半径 $\sqrt{2}$ の円となるとき、方程式②について

$$\begin{aligned} a^2(a^2-1) &= (\sqrt{2})^2 \\ \Leftrightarrow (a^2)^2 - a^2 - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a^2-2)(a^2+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2-2 &= 0 \qquad (\because a^2+1 > 0) \\ \Leftrightarrow a &= \sqrt{2} \qquad (\because a > 0) \end{aligned}$$

となる。よって、このとき S の方程式は、①に $a=\sqrt{2}$ を代入して

$$(x-1)^2+(y-\sqrt{2})^2+(z+2)^2=4 \qquad \cdots \textcircled{3}$$

となる。したがって、 S は半径 2 の球面であるから、 S の内部も含めた球の体積は

$$\frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \frac{32}{3}\pi$$

である。

次に、この球を平面 $y=t$ ($-2+\sqrt{2} \leq t \leq 2+\sqrt{2}$) で切ったときの断面積を $A(t)$ とおく。③において $y=t$ を代入すると

$$(x-1)^2+(z+2)^2=-t^2+2\sqrt{2}t+2$$

となるので、 $A(t)$ は半径 $\sqrt{-t^2+2\sqrt{2}t+2}$ の円の面積に等しく、

$$A(t) = \pi(-t^2+2\sqrt{2}t+2)$$

である。よって、この球が xz 平面で切り取られる小さい方の部分の体積は

$$\begin{aligned} \int_{-2+\sqrt{2}}^0 A(t) dt &= \pi \int_{-2+\sqrt{2}}^0 (-t^2+2\sqrt{2}t+2) dt \\ &= \pi \left[-\frac{1}{3}t^3 + \sqrt{2}t^2 + 2t \right]_{-2+\sqrt{2}}^0 \\ &= \frac{16-10\sqrt{2}}{3}\pi \end{aligned}$$

である。

〔Ⅲ〕

(1)

$0 < t < \pi$ において、

$$\frac{dx}{dt} = \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = -2 \cos 2t$$

より、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{2 \cos 2t}{\sin t}$$

である。

(答) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2 \cos 2t}{\sin t}$

(2)

$0 < t < \pi$ において、

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2 \cos 2t}{\sin t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2t = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \quad (\because 0 < 2t < 2\pi)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$$

となる。また、 $t = \frac{\pi}{4}$ のとき、 $x = 1 - \cos \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ 、 $t = \frac{3}{4}\pi$ のとき、 $x = 1 - \cos \frac{3}{4}\pi = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

である。

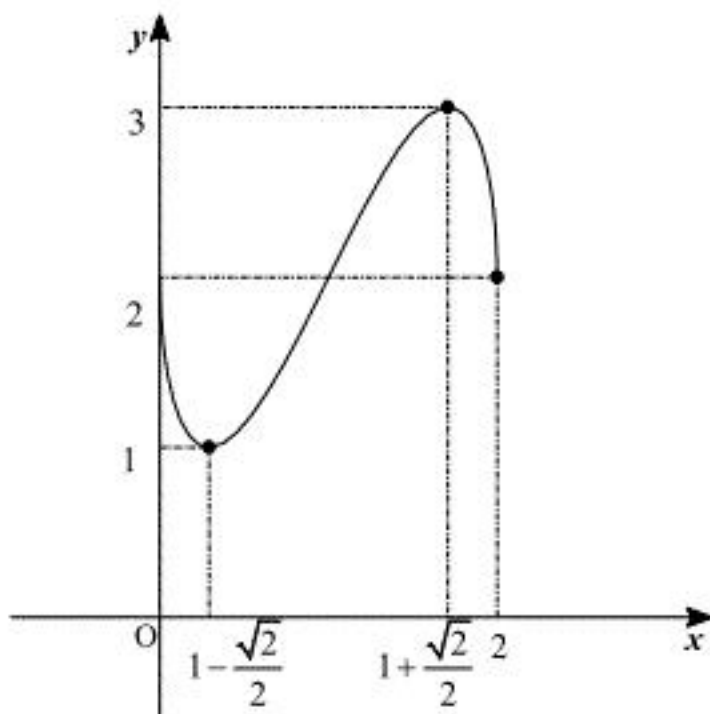
(答) $t = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$; $t = \frac{\pi}{4}$ のとき $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ 、 $t = \frac{3}{4}\pi$ のとき $x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

(3)

$0 < t < \pi$ において $\frac{dx}{dt} = \sin t > 0$ であり、 $\frac{dy}{dt}$ の符号は $\frac{dy}{dx}$ の符号と一致する。よって、 x, y の増減表は次のようになる。

t	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{3}{4}\pi$	...	π
$\frac{dx}{dt}$		+		+		+	
x	0	↗	$1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	$1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	2
$\frac{dy}{dt}$		-	0	+	0	-	
y	2	↘	1	↗	3	↘	2

したがって、曲線 C の概形は次のようになる。



(答) 前図

(4)

(3)のグラフより、求める面積は

$$\int_0^2 y dx = \int_0^\pi (2 - \sin 2t) \frac{dx}{dt} dt = \int_0^\pi (2 \sin t - 2 \sin^2 t \cos t) dt = \left[-2 \cos t - \frac{2}{3} \sin^3 t \right]_0^\pi = 4$$

となる。

(答) 4

【IV】

【解答】

- (1) ① $\frac{1}{2n^2-3n+2}$ ② $\frac{1}{2}$
- (2) ③ $-\frac{1}{2}$
- (3) ④ 10080 ⑤ 5760
- (4) ⑥ (3, 2)
- (5) ⑦ $\left(n+\frac{1}{2}\right)x$

【解説】

- (1) ある自然数 m に対し、 $a_m=0$ であると仮定する。このとき、与えられた漸化式より $a_{m+1}=0$ を得る。これを繰り返すと、 $a_1=0$ を得るが、 $a_1=1$ に反する。したがって、すべての自然数 n に対し、 $a_n \neq 0$ となるから、与えられた漸化式の両辺において逆数をとることができる、

$$1+\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+4n$$

を得る。ここで、 $b_n=\frac{1}{a_n}$ とおくと、

$$b_{n+1}-b_n=4n-1$$

となる。したがって、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k-1) \\ &= 1 + 4 \cdot \frac{1}{2} (n-1)n - (n-1) \\ &= 2n^2 - 3n + 2 \end{aligned}$$

である。 $b_1=1$ より、この表式は $n=1$ のときにも成立する。よって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{2n^2-3n+2}$$

である。また、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2-3n+2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

- (2)

$x^2+y^2+z^2=4$ に $(x, y, z)=(\cos \pi t^2, \sin \pi t^2, t)$ を代入すると

$$1+t^2=4 \qquad \therefore t=\pm\sqrt{3}$$

を得る。よって、

$$\overline{\mathrm{OP}}=(-1, 0, -\sqrt{3}), \overline{\mathrm{OQ}}=(-1, 0, \sqrt{3})$$

であるから、

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overline{\mathrm{OP}} \cdot \overline{\mathrm{OQ}}}{|\overline{\mathrm{OP}}||\overline{\mathrm{OQ}}|} \\ &= \frac{-2}{2 \cdot 2} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

- (3)

TAKOYAKI の 8 文字を 1 列に並べるとき、A と K が 2 文字ずつあるから、すべての並べ方は

$$\frac{8!}{2!2!}=10080 \text{ (通り)}$$

である。

次に、同じ文字が隣り合わない並べ方について考える。同じ文字が隣り合うのは、2 文字の A が隣り合う、または 2 文字の K が隣り合うときである。

- [1] 2 文字の A が隣り合う並べ方

2 文字の A を 1 文字と考えればよい。K が 2 文字あることに注意して、求める並べ方は

$$\frac{7!}{2!}=2520 \text{ (通り)}$$

であることがわかる。

- [2] 2 文字の K が隣り合う並べ方

[1]と同様に考えて、求める並べ方は

$$\frac{7!}{2!}=2520 \text{ (通り)}$$

であることがわかる。

- [3] 2 文字の A が隣り合う、かつ 2 文字の K が隣り合う並べ方

2 文字の A、2 文字の K をそれぞれ 1 文字と考えればよいから、求める並べ方は

$$6!=720 \text{ (通り)}$$

であることがわかる。

以上[1], [2], [3]より、同じ文字が隣り合う並べ方は

$$2520+2520-720=4320 \text{ (通り)}$$

となるから、同じ文字が隣り合わない並べ方は

$$10080-4320=5760 \text{ (通り)}$$

であることがわかる。

- (4)

$$J^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$$

であるから、

$$\begin{aligned} A^2 &= (aE+bJ)^2 \\ &= a^2E+2abJ+b^2J^2 \\ &= (a^2+b^2)E+2abJ \end{aligned}$$

である。したがって、 $A^2=\begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{pmatrix}$ となるとき、

$$a^2+b^2=13, 2ab=12$$

である。第 1 式より

$$\begin{aligned} (a+b)^2-2ab &= 13 \\ \Leftrightarrow (a+b)^2 &= 25 \quad (\because 2ab=12) \\ \Leftrightarrow a+b &= 5 \quad (\because a>0, b>0 \Rightarrow a+b>0) \end{aligned}$$

を得る。また、第 2 式より $ab=6$ であるから、 a, b は 2 次方程式 $t^2-5t+6=0$ の 2 解である。これを解くと

$$(t-3)(t-2)=0 \quad \therefore t=2, 3$$

となり、 $a>b$ であることから $(a, b)=(3, 2)$ である。

- (5)

実数 α, β に対し、

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

が成り立つ。辺々加えると

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) &= 2\sin \alpha \cos \beta \\ \therefore \cos \beta \sin \alpha &= \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) \} \end{aligned}$$

を得る。この式に $\beta=kx, \alpha=\frac{1}{2}x$ を代入すると

$$\cos kx \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) x - \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) x \right\}$$

を得る。よって、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \cos kx \sin \frac{x}{2} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) x - \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) x \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sin \frac{3}{2} x - \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{5}{2} x - \sin \frac{3}{2} x + \cdots + \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x - \sin \left(n - \frac{1}{2} \right) x \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x - \sin \frac{x}{2} \right\} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x$$

となる。