

〔I〕

(1)

$t=|x-y|$ とおけば、不等式は、 $(t-2)(t-4) \leq 0$ とかけるので、

$$2 \leq t \leq 4 \quad \therefore 2 \leq |x-y| \leq 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。次に、 x, y の大小関係に関して場合分けをして考える。

[1] $x \geq y$ のとき

不等式①は

$$2 \leq x-y \leq 4 \Leftrightarrow x-4 \leq y \leq x-2$$

となり、このとき、 $x \geq y$ は満たされている。

[2] $x < y$ のとき

不等式①は

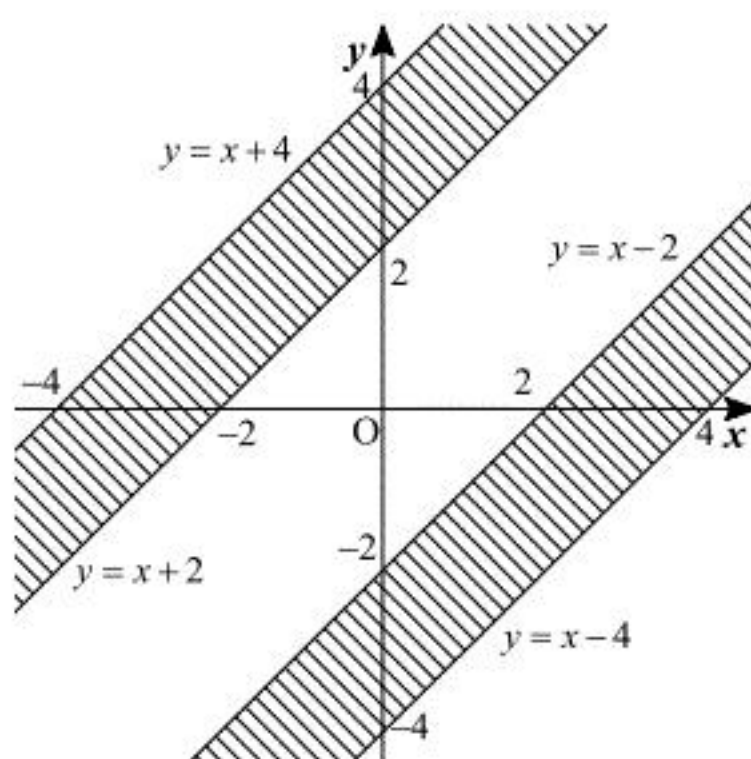
$$2 \leq y-x \leq 4 \Leftrightarrow x+2 \leq y \leq x+4$$

となり、このとき、 $x < y$ は満たされている。

以上, [1], [2] より、領域 D は

$$x-4 \leq y \leq x-2 \quad \text{または} \quad x+2 \leq y \leq x+4$$

で表される領域であり、図示すると下図のようになる。



(答) 前図(境界を含む)

(2)

$x^2 + y^2 = r^2$ は中心が原点で半径が r である円の方程式である。 r が、円と $y = x - 2$ または $y = x + 2$ が接するときの半径以上になれば領域 D と円は共有点を持つ。原点と $y = x - 2$ 、つまり $x - y - 2 = 0$ の距離は

$$\frac{|0-0-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \sqrt{2}$$

であり、同様に、原点と $y = x + 2 \Leftrightarrow x - y + 2 = 0$ の距離も

$$\frac{|0-0+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \sqrt{2}$$

であるから、求める範囲は $r \geq \sqrt{2}$ である。

(答) $r \geq \sqrt{2}$

〔Ⅱ〕

〔解答〕

- ① 777 ② 120 ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{7}{20}$ ⑤ $\frac{7}{12}$

〔解説〕

(1)

得られる数字で最大のものは987であり、最小のものは210であるから、その差は $987-210=777$ である。

(2)

0から9までの10枚のカードから3枚を無作為に取り出し、大きい順に並び替え3桁の整数を作るから、得られる数字は全部で

$$\begin{aligned} {}_{10}C_3 &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= 120 \text{ (個)} \end{aligned}$$

である。

(3)

得られた数字が600未満となるようなカードの取り出し方の総数を求める。得られた数字が600未満ということは、取り出したすべてのカードが5以下であったということであるから、この場合の数は

$${}_6C_3 = 20 \text{ (通り)}$$

である。また、カードの取り出し方の総数は、(2)より120通りあり、これらは同様に確からしく起こるから、求める確率は

$$\frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

である。

(4)

得られた数字が5の倍数となるようなカードの取り出し方の総数を求める。以下、一の位について場合分けをして考える。

[1] 一の位が0のとき

0と、0より大きい数字の9枚のカードから2枚を引けばよいので、この場合の数は

$${}_9C_2 = 36 \text{ (通り)}$$

である。

[2] 一の位が5のとき

5と5より大きい数字の書かれた4枚のカードから2枚取り出せばよいので、この場合の数は

$${}_4C_2 = 6 \text{ (通り)}$$

である。

以上、[1]、[2]より、求める確率は、(3)と同様に考えることで

$$\frac{36+6}{120} = \frac{7}{20}$$

となる。

(5)

得られた数字が偶数になるということは、この数字の一の位の数が偶数になっているということである。以下、一の位の数によって場合分けして考える。

[1] 一の位の数が0の場合

(4)の[1]で調べた結果より、この場合の数は

$${}_9C_2 = 36 \text{ (通り)}$$

である。

[2] 一の位の数が2の場合

(4)の[2]と同様に考えれば、この場合の数は

$${}_7C_2 = 21 \text{ (通り)}$$

であることがわかる。

[3] 一の位の数が4の場合

同様にして、この場合の数は

$${}_5C_2 = 10 \text{ (通り)}$$

であることがわかる。

[4] 一の位の数が6の場合

同様にして、この場合の数は

$${}_3C_2 = 3 \text{ (通り)}$$

であることがわかる。

[5] 一の位の数が8の場合

このような数は作れない。

以上、[1]、[2]、[3]、[4]、[5]より、求める確率は

$$\frac{36+21+10+3+0}{120} = \frac{7}{12}$$

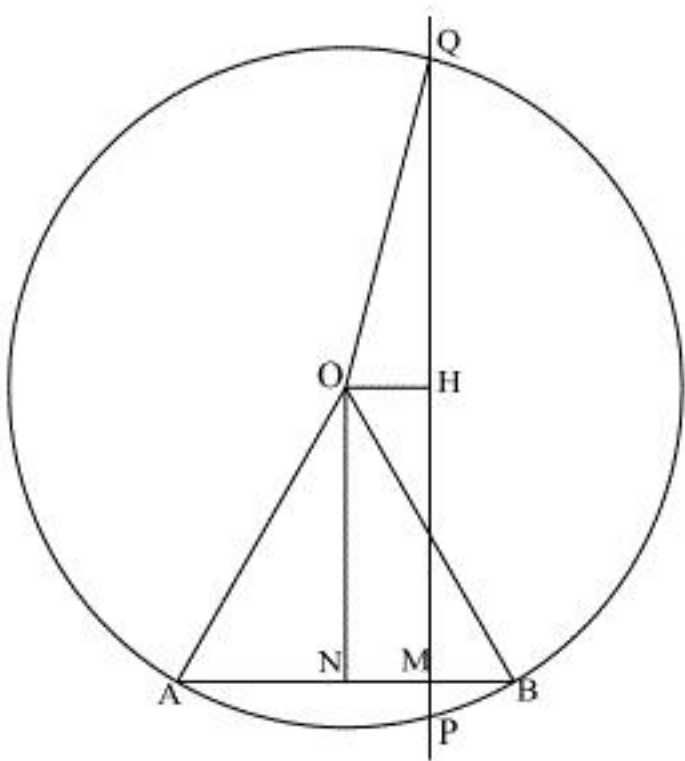
となる。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

- ① 2 ② 60 ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{3}{4}$
- ⑤ $\frac{\sqrt{15}}{2}$ ⑥ $-\frac{\sqrt{5}}{4}$ ⑦ $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ ⑧ $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$

〔解説〕



$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}|^2 &= |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}|^2 \\ &= |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

より

$$|\overrightarrow{AB}| = 2$$

であり、△OABは正三角形であるから $\angle AOB = 60^\circ$ である。また、Mは線分ABを3:1に内分する点であるから

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$$

となる。ここで、線分ABの中点をNとおくと、△OABが正三角形であるから、直線ONは線分ABの垂直二等分線であり、四角形OHMNは長方形となる。よって

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OH}| &= |\overrightarrow{NM}| \\ &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}| - \frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}| \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

であるから、三平方の定理より

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{HQ}| &= \sqrt{|\overrightarrow{OQ}|^2 - |\overrightarrow{OH}|^2} \\ &= \sqrt{2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ \therefore |\overrightarrow{HQ}| &= \frac{\sqrt{15}}{2} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。ここで四角形OHMNは長方形であるから、 $\overrightarrow{HQ}$ と $\overrightarrow{ON}$ は平行であり、

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

であるから、ある実数kを用いて

$$\overrightarrow{HQ} = k(\vec{a} + \vec{b})$$

とおける。ここで、 $\overrightarrow{HQ}$ と $\overrightarrow{ON}$ の向きは反対であるから、 $k < 0$ であることに注意すると

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{HQ}| &= |k| |\vec{a} + \vec{b}| \\ &= -k \sqrt{|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2} \\ &= -2\sqrt{3}k \end{aligned}$$

となる。これと①より

$$k = \frac{\sqrt{15}}{2 \cdot (-2\sqrt{3})} = -\frac{\sqrt{5}}{4}$$

と求まる。したがって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HQ} \\ &= \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{HQ} \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HQ} \\ &= \frac{1}{4}(\vec{b} - \vec{a}) - \frac{\sqrt{5}}{4}(\vec{a} + \vec{b}) \\ &= \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\vec{a} + \frac{1-\sqrt{5}}{4}\vec{b} \end{aligned}$$

となる。